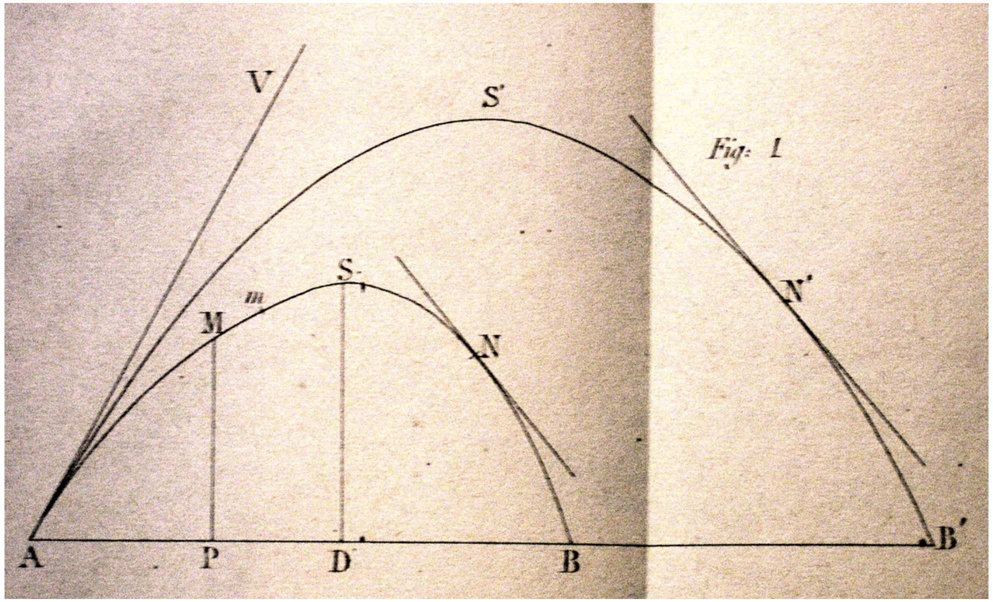
SC2011

International Conference on Scientific Computing

Calculating Firing Tables in 18th and 19th Centuries

Dominique Tournès
University of La Réunion

dominique.tournes@univ-reunion.fr



x, y : projectile coordinates

θ : tangent inclination

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta$: tangent slope

s : trajectory arc

v : projectile velocity

t : time

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{F}(v)\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{F}(v)\sin\theta - g \end{cases}$$

$$\mathrm{F}(v) = 0 : \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos\theta_0)\, t \\ y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad y = x\tan\theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(v\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{F}(v)\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}(v\sin\theta)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{F}(v)\sin\theta - g \end{cases}$$

$$\boxed{g\,\mathrm{d}(v\cos\theta) = v\,\mathrm{F}(v)\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\begin{cases} g\,\mathrm{d}x = -v^2\mathrm{d}\theta \\ g\,\mathrm{d}y = -v^2\tan\theta\,\mathrm{d}\theta \\ g\,\mathrm{d}t = -\dfrac{v}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ g\,\mathrm{d}s = -\dfrac{v^2}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

BALISTIQUE EXTÉRIEURE

PAR

F. SIACCI

LIEUTENANT-COLONEL DE L'ARTILLERIE ITALIENNE,
PROFESSEUR DE BALISTIQUE A L'ÉCOLE D'APPLICATION DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE,
PROFESSEUR ORDINAIRE DE MÉCANIQUE SUPÉRIEURE A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE TURIN,
DÉPUTÉ AU PARLEMENT.

TRADUCTION ANNOTÉE

Par P. LAURENT

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES
INGENIEUR A LA SOCIÉTÉ DES FORGES ET CHANTIERS DE LA MÉDITERRANÉE

SUIVIE D'UNE

NOTE SUR LES PROJECTILES DISCOÏDES

Par F. CHAPEL, chef d'escadron au 11e régiment d'artillerie.

BERGER-LEVRAULT ET Cie, ÉDITEURS

PARIS — 5, RUE DES BEAUX-ARTS | NANCY — 18, RUE DES GLACIS

1892

Francesco Siacci, 1888

"Our intention is not to present a treatise of pure science, but a book of immediate usefulness. Few years ago ballistics was still considered by the artillerymen and not without reason as a luxury science, reserved for the theoreticians. We tried to make it practical, adapted to solve fast the firing questions, as exactly as possible, with economy of time and money."

Strategy 1:
To calculate an approximate integral of the exact differential equation

- Calculate the integral by successive small arcs
- Develop the integral into an infinite series and keep the first terms
- Construct graphically the integral curve

Strategy 2:
To calculate the exact integral of an approximate differential equation

Leonhard Euler

« Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque »

Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin
1753

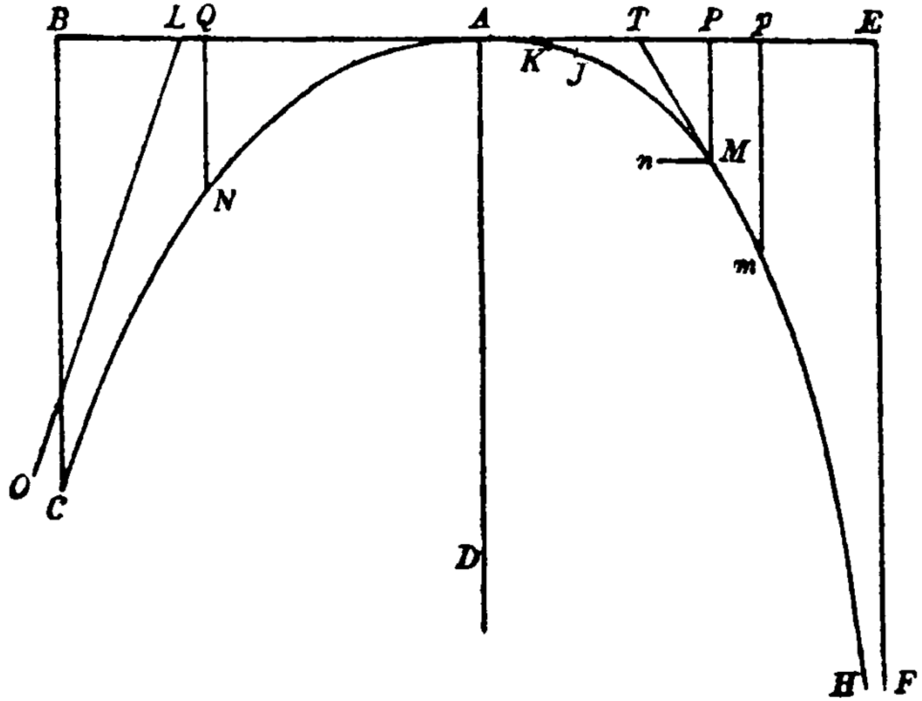


Fig. 1.

$$x = c\int \frac{\mathrm{d}p}{n+\mathrm{P}}$$

$$y = c\int \frac{p\,\mathrm{d}p}{n+\mathrm{P}}$$

$$s = c\,\ell\,\frac{n+P}{n}$$

$$t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{n+\mathrm{P}}}$$

$$v = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha c\,(1+p^2)}{n+\mathrm{P}}$$

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tang}\varphi$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\,p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\,\ell\,(p+\sqrt{1+p^2}\,)$$

$$\delta x = \delta s\,\cos\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$$

$$\delta y = \delta s\,\sin\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$$

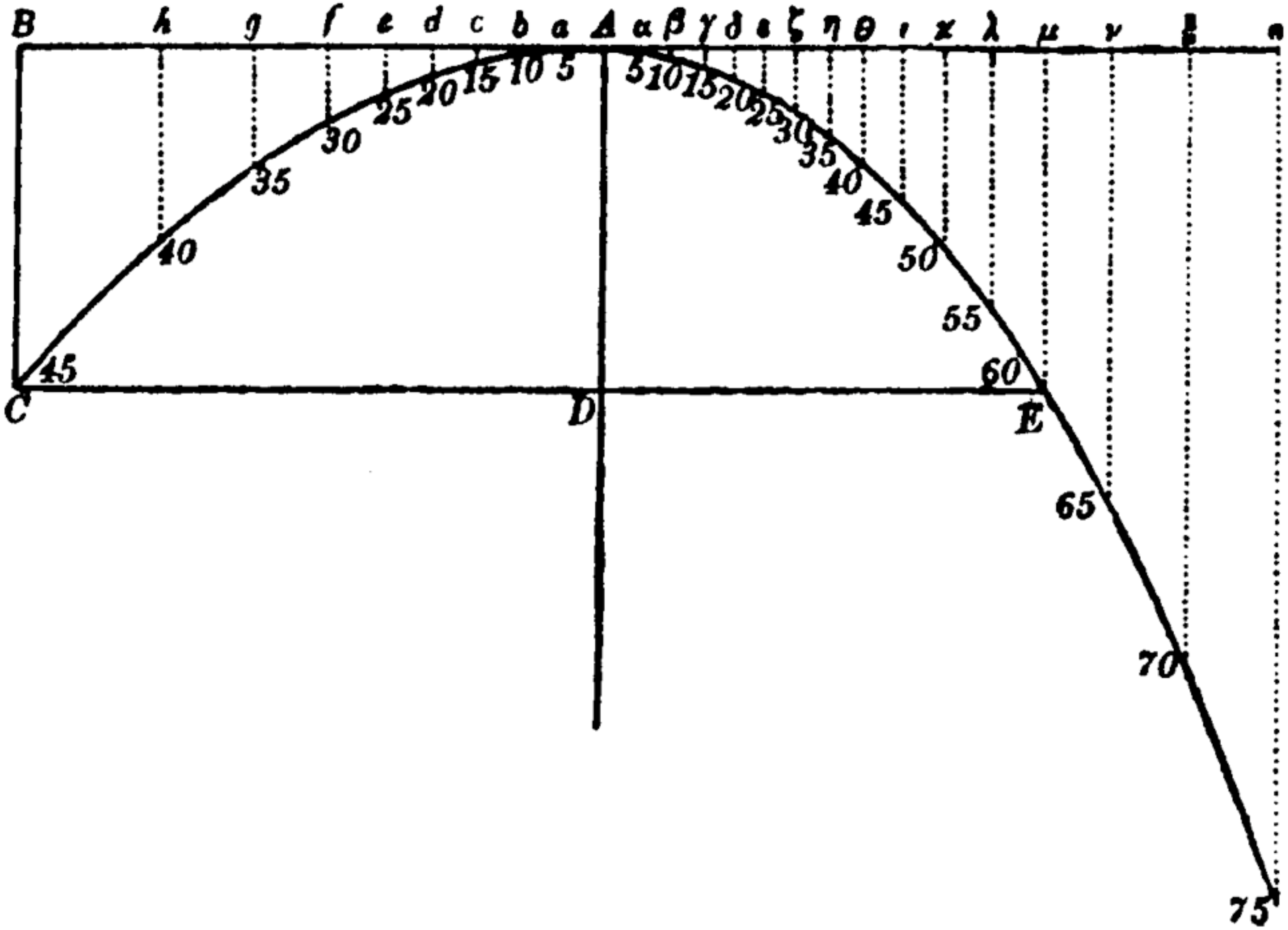
ESPECE XII.

Pour le branche ascendante

Inclin. en N	L' arc AN, $=2,302585c$ mult. par	L'abscisse AQ $=2,302585c$ mult. par	L'appliquée QN $=2,302585c$ mult. par	La vitesse en N $=\sqrt{2agc}$ mult. par	Le tems par AN $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247	0,0000000''
	213983	213779	9334	213820	284763
5	0,0213983	0,0213779	0,0009334	0,7622067	0,0284763
	230448	228477	30080	295427	296594
10	0,0444431	0,0442256	0,0039414	0,7917494	0,0581357
	255349	249296	55268	395510	314747
15	0,0699780	0,0691552	0,0094682	0,8313004	0,0896104
	291646	278148	87699	523866	340273
20	0,0991426	0,0969700	0,0182381	0,8836870	0,1236377
	345303	319018	132142	697094	376196
25	0,1336729	0,1288718	0,0314523	0,9533964	0,1612573
	426536	377472	196952	945651	426723
30	0,1763265	0,1666190	0,0511475	1,0479615	0,2039296
	555745	468711	298602	1331725	499521
35	0,2319010	0,2134901	0,0810077	1,1811330	0,2538817
	778564	617676	473960	2003240	609504
40	0,3097574	0,2752577	0,1284037	1,3814570	0,3148321
	1219806	899335	824089	3407955	790812
45	0,4317380	0,3651912	0,2108126	1,7222525	0,3939133
	2381005	1608581	1755460	7698425	1149287
50	0,6698385	0,5260493	0,3863586	2,4920950	0,5088420

ESPECE XII. Pour la branche descendante.

Inclin. en M	L' arc AM $=2,302585c$ mult par	L' abscisse AP $=2,302585c$ mult. par	L'appliquée PM $=2,302585c$ mult. par	La vitesse en M $=\sqrt{2agc}$ mult. par	Le tems par M $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247	0,0000000
	203933	203739	8895	− 144229	277997
5	0,0203933	0,0203739	0,0008895	0,7264018	0,0277997
	199209	197505	26002	− 82616	275814
10	0,0403142	0,0401244	0,0034897	0,7181402	0,0553811
	199299	194575	43136	− 25702	278019
15	0,0602441	0,0595819	0,0078033	0,7155700	0,0831830
	204125	194677	61381	+ 28920	284687
20	0,0806566	0,0790496	0,0139414	0,7184620	0,1116517
	214049	197755	81913	83320	296214
25	0,1020615	0,0988251	0,0221327	0,7267940	0,1412731
	229898	203922	106155	139390	313328
30	0,1250513	0,1192173	0,0327482	0,7407330	0,1726059
	253104	213465	135993	198950	337196
35	0,1503617	0,1405638	0,0463475	0,7606280	0,2063255
	285969	226875	174086	263895	369608
40	0,1789586	0,1632513	0,0637561	0,7870175	0,2432863
	332130	244872	224384	336125	413278
45	0,2121716	0,1877385	0,0861945	0,8206300	0,2846141
	397389	268470	292985	417430	472492
50	0,2519105	0,2145855	0,1154930	0,8623730	0,3318633
	491194	299018	389688	509230	553474
55	0,3010299	0,2444873	0,1544618	0,9132960	0,3872107
	629347	338148	530786	611670	667116
60	0,3639646	0,2783021	0,2075404	0,9744630	0,4539223
	841010	388335	745985	720310	832818
65	0,4480656	0,3171356	0,2821389	1,0464940	0,5372041
	1178537	451007	1088830	825390	1084230
70	0,5659193	0,3622363	0,3910219	1,1290330	0,6456271
	1754921	527715	1673697	900010	1495880
75	0,7414114	0,4150078	0,5583916	1,2190340	0,7952151
	2851538	617186	2783950	894400	2257818
80	1,0265652	0,4767264	0,8367866	1,3084740	1,0209969
	5513732	719686	5466560	733500	4100500
85	1,5779384	0,5486950	1,3834426	1,3818240	1,4310469



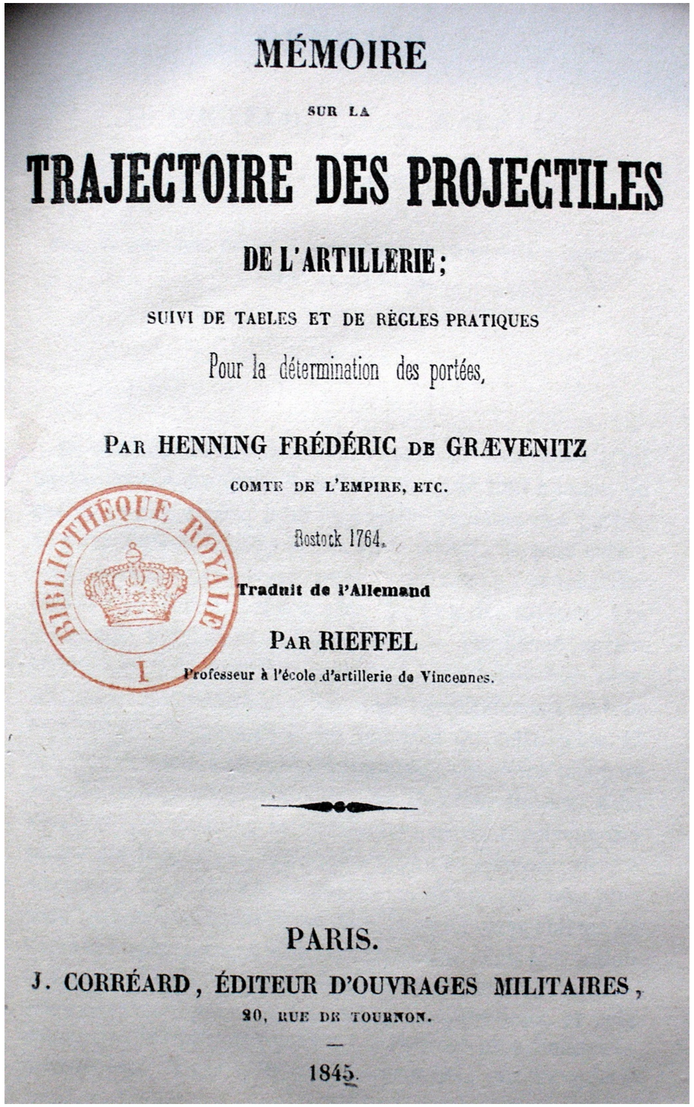
B
h
g
f
e
d
c
b
a
Δ
α
β
γ
δ
ε
ζ
η
θ
ι
κ
λ
μ
ν
ξ
C
D
E
45
40
35
30
25
20
15
10
5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75

Fig. 3.

Henning Friedrich von Grävenitz

Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschütz-Kugeln

Rostock, 1764



MÉMOIRE

SUR LA

TRAJECTOIRE DES PROJECTILES

DE L'ARTILLERIE;

SUIVI DE TABLES ET DE RÈGLES PRATIQUES

Pour la détermination des portées,

PAR HENNING FRÉDÉRIC DE GRÆVENITZ

COMTE DE L'EMPIRE, ETC.

Rostock 1764.

Traduit de l'Allemand

PAR RIEFFEL

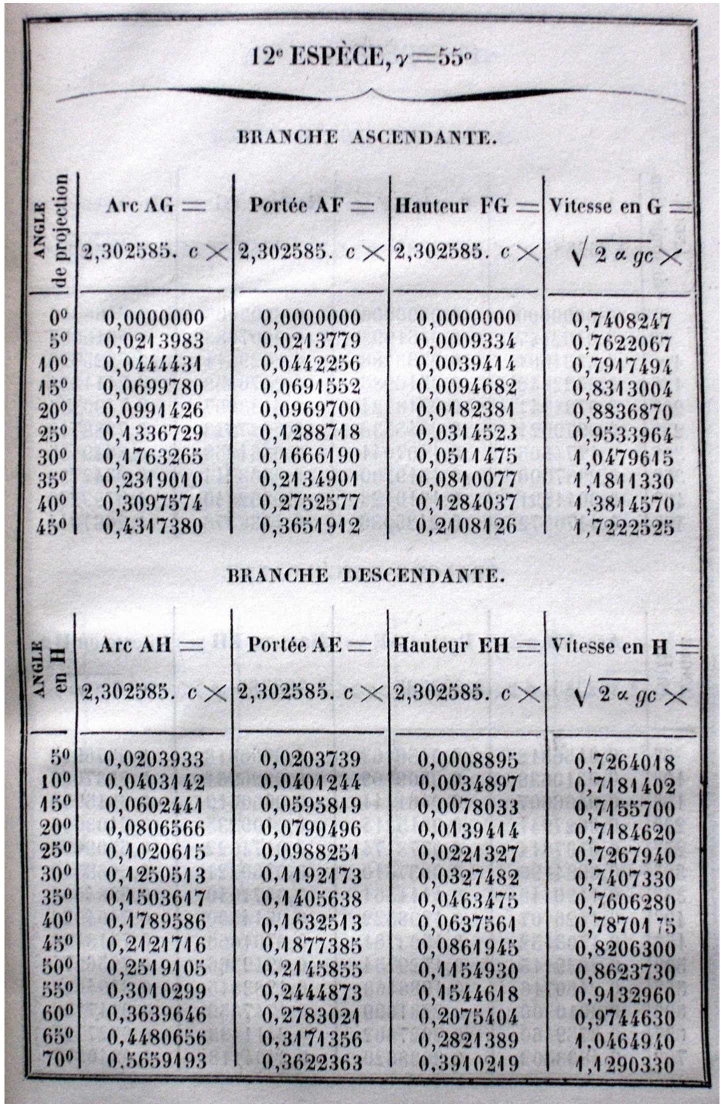
Professeur à l'école d'artillerie de Vincennes.

PARIS.

J. CORRÉARD, ÉDITEUR D'OUVRAGES MILITAIRES,

20, RUE DE TOURNON.

1845.



12e ESPÈCE, $\gamma = 55°$

BRANCHE ASCENDANTE.

ANGLE de projection	Arc AG = 2,302585. c ×	Portée AF = 2,302585. c ×	Hauteur FG = 2,302585. c ×	Vitesse en G = $\sqrt{2\,\alpha\, gc}$ ×
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247
5°	0,0213983	0,0213779	0,0009334	0,7622067
10°	0,0444431	0,0442256	0,0039414	0,7917494
15°	0,0699780	0,0691552	0,0094682	0,8313004
20°	0,0991426	0,0969700	0,0182381	0,8836870
25°	0,1336729	0,1288718	0,0314523	0,9533964
30°	0,1763265	0,1666190	0,0511475	1,0479615
35°	0,2319010	0,2134901	0,0810077	1,1811330
40°	0,3097574	0,2752577	0,1284037	1,3814570
45°	0,4317380	0,3651912	0,2108126	1,7222525

BRANCHE DESCENDANTE.

ANGLE en H	Arc AH = 2,302585. c ×	Portée AE = 2,302585. c ×	Hauteur EH = 2,302585. c ×	Vitesse en H = $\sqrt{2\,\alpha\, gc}$ ×
5°	0,0203933	0,0203739	0,0008895	0,7264018
10°	0,0403142	0,0401244	0,0034897	0,7181402
15°	0,0602441	0,0595849	0,0078033	0,7155700
20°	0,0806566	0,0790496	0,0139414	0,7184620
25°	0,1020615	0,0988251	0,0221327	0,7267940
30°	0,1250513	0,1192173	0,0327482	0,7407330
35°	0,1503617	0,1405638	0,0463475	0,7606280
40°	0,1789586	0,1632513	0,0637561	0,7870175
45°	0,2121716	0,1877385	0,0861945	0,8206300
50°	0,2519105	0,2145855	0,1154930	0,8623730
55°	0,3010299	0,2444873	0,1544618	0,9132960
60°	0,3639646	0,2783021	0,2075404	0,9744630
65°	0,4480656	0,3171356	0,2821389	1,0464940
70°	0.5659493	0,3622363	0,3910219	1,1290330

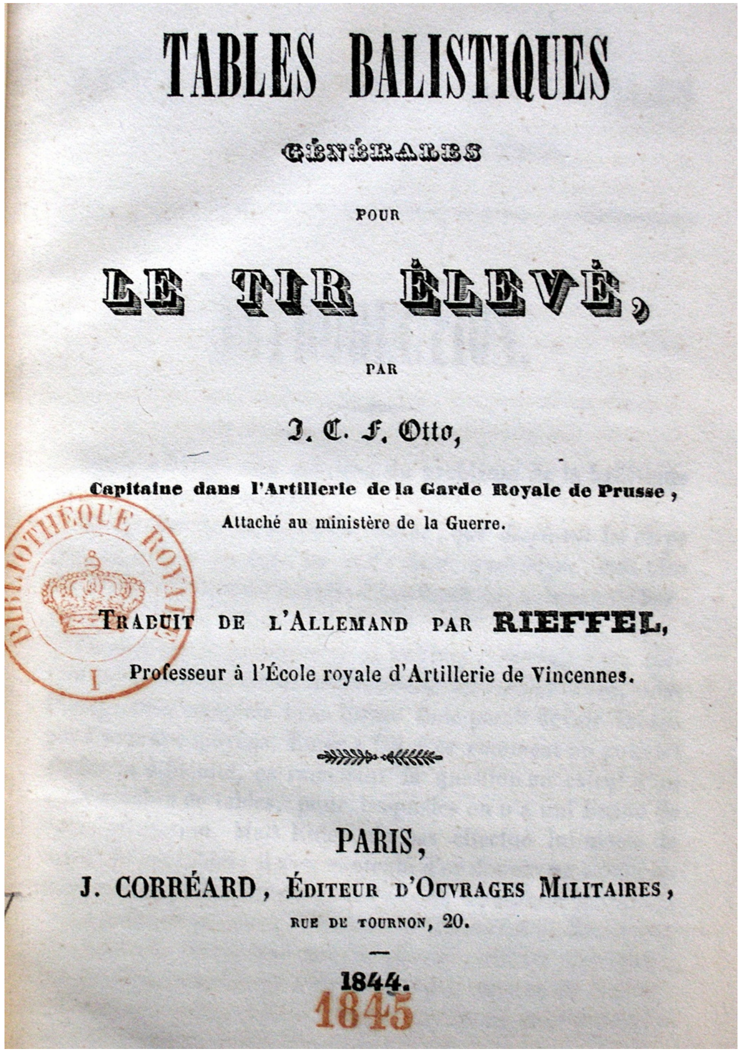
Jacob Christian Friedrich Otto

Ballistische Tafeln nebst einer Anleitung vermittelst derselben einige Hauptfälle des ballistischen Problems in Zahlen aufzulösen, für quadratischen Luftwiderstand

Berlin, 1834

Tafeln für den Bombenwurf

Berlin, 1842



TABLES BALISTIQUES

GÉNÉRALES

POUR

LE TIR ÉLEVÉ,

PAR

J. C. F. Otto,

Capitaine dans l'Artillerie de la Garde Royale de Prusse,

Attaché au ministère de la Guerre.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR RIEFFEL,

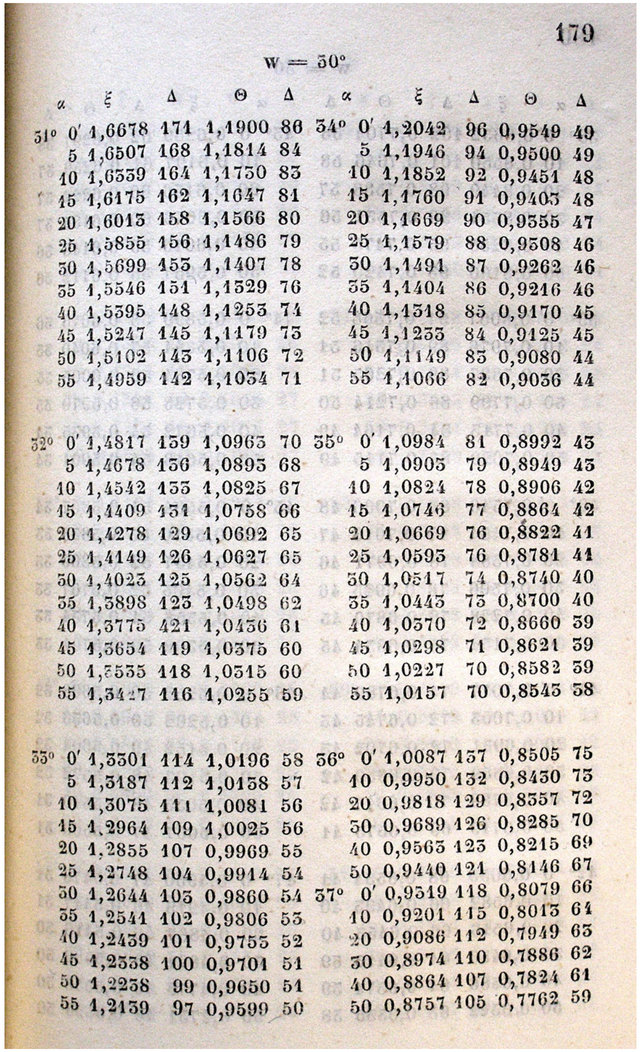
Professeur à l'École royale d'Artillerie de Vincennes.

PARIS,

J. CORRÉARD, ÉDITEUR D'OUVRAGES MILITAIRES,

RUE DU TOURNON, 20.

1844.



W = 30°

α	ξ	Δ	Θ	Δ	α	ξ	Δ	Θ	Δ
31° 0'	1,6678	171	1,1900	86	34° 0'	1,2042	96	0,9549	49
5	1,6507	168	1,1814	84	5	1,1946	94	0,9500	49
10	1,6339	164	1,1730	83	10	1,1852	92	0,9451	48
15	1,6175	162	1,1647	81	15	1,1760	91	0,9403	48
20	1,6013	158	1,1566	80	20	1,1669	90	0,9355	47
25	1,5855	156	1,1486	79	25	1,1579	88	0,9308	46
30	1,5699	153	1,1407	78	30	1,1491	87	0,9262	46
35	1,5546	151	1,1329	76	35	1,1404	86	0,9216	46
40	1,5395	148	1,1253	74	40	1,1318	85	0,9170	45
45	1,5247	145	1,1179	73	45	1,1233	84	0,9125	45
50	1,5102	143	1,1106	72	50	1,1149	83	0,9080	44
55	1,4959	142	1,1034	71	55	1,1066	82	0,9036	44
32° 0'	1,4817	139	1,0963	70	35° 0'	1,0984	81	0,8992	43
5	1,4678	136	1,0893	68	5	1,0903	79	0,8949	43
10	1,4542	133	1,0825	67	10	1,0824	78	0,8906	42
15	1,4409	131	1,0758	66	15	1,0746	77	0,8864	42
20	1,4278	129	1,0692	65	20	1,0669	76	0,8822	41
25	1,4149	126	1,0627	65	25	1,0593	76	0,8781	41
30	1,4023	125	1,0562	64	30	1,0517	74	0,8740	40
35	1,3898	123	1,0498	62	35	1,0443	73	0,8700	40
40	1,3775	421	1,0436	61	40	1,0370	72	0,8660	39
45	1,3654	119	1,0375	60	45	1,0298	71	0,8621	39
50	1,3535	118	1,0315	60	50	1,0227	70	0,8582	39
55	1,3427	116	1,0255	59	55	1,0157	70	0,8543	38
33° 0'	1,3301	114	1,0196	58	36° 0'	1,0087	137	0,8505	75
5	1,3187	112	1,0158	57	10	0,9950	132	0,8430	73
10	1,3075	111	1,0081	56	20	0,9818	129	0,8357	72
15	1,2964	109	1,0025	56	30	0,9689	126	0,8285	70
20	1,2855	107	0,9969	55	40	0,9563	123	0,8215	69
25	1,2748	104	0,9914	54	50	0,9440	121	0,8146	67
30	1,2644	103	0,9860	54	37° 0'	0,9319	118	0,8079	66
35	1,2541	102	0,9806	53	10	0,9201	115	0,8013	64
40	1,2439	101	0,9755	52	20	0,9086	112	0,7949	63
45	1,2338	100	0,9701	51	30	0,8974	110	0,7886	62
50	1,2238	99	0,9650	51	40	0,8864	107	0,7824	61
55	1,2139	97	0,9599	50	50	0,8757	105	0,7762	59

Johann Heinrich Lambert

« Mémoire sur la résistance des fluides avec la solution du probleme balistique »

Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin

1765

Donc, en fubftituant ces valeurs, il fera

$$y = w.\,\text{fin}\,\omega - \frac{g.\,w^2}{2V^2} - \frac{w^3 g}{3aV^2} - \frac{g w^4}{6a^2 V^2} - \frac{g w^5}{15 V^2 a^3} - \&c.$$
$$- \frac{g^2 w^4 \,\text{fin}\,\omega}{12 a V^4} + \frac{2ggw^5\,\text{fin}\,\omega}{15 V^4 a^2}$$
$$- \frac{g^3 w^5 \,\text{cof}\,\omega^2}{60 a V^6}$$

Voilà donc la fuite qu'il s'agiffoit de trouver, & qui exprime l'ordonnée PM par l'abfciffe AQ, la viteffe initiale V, l'angle d'élévation ω, la gravité g & l'effet de la réfiftance a.

§. 124. Mais, pour comparer cette fuite à celle que nous avions trouvée ci-deffus (§. 111.) nous ferons des fubftitutions tout à fait analogues. Nommons donc

$$\frac{2w}{a} = \xi$$
$$\frac{2y}{a} = \eta$$
$$\frac{g}{VV} = \frac{2m}{a}.$$

Ces valeurs étant fubftituées, nous aurons

$$\eta = \xi\,\text{fin}\,\omega - \frac{m\xi^2}{2} - \frac{m.\xi^3}{2.3} - \frac{m\xi^4}{2.3.4} - \frac{m\xi^5}{2.3.4.5} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2.\xi^4\,\text{fin}\,\omega}{2.3.4} + \frac{2.\text{fin}\,\omega.m^2\xi^5}{2.3.4.5}$$
$$- \frac{\text{cof.}\,\omega^2.m^3\xi^5}{2.3.4.5}$$

D'où

Jacques-Frédéric Français

Unpublished paper, 1805
(quoted by Didion in 1848)

$$
\begin{aligned}
(20)\quad t = 2 \left(\frac{cm}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \Big[& \cos\varphi \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right) \\
& - \frac{1}{2}\frac{m}{c}\,\vartheta \cos\varphi \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^2 \\
& - \frac{1}{3}\frac{m}{c} \Big\{ \frac{1}{2}\,\vartheta \cos\varphi - \frac{m}{c}\,\vartheta_c^2 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^3 \\
& + \frac{1}{4}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \Big\{ \frac{2}{2}\,\vartheta_c^2 \cos\varphi - \frac{m}{c}\,\vartheta_c^3 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^4 \\
& + \frac{1}{5}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \Big\{ \frac{1.2}{2.4}\,\vartheta_c^2 \cos\varphi - \frac{3}{2}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^3 \cos\varphi + \left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^4 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^5 \\
& - \frac{1}{6}\left(\frac{m}{c}\right)^3 \Big\{ \frac{2.3}{2.4}\,\vartheta_c^3 \cos\varphi - \frac{4}{2}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^4 \cos\varphi + \left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^5 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^6 \\
& - \frac{1}{7}\left(\frac{m}{c}\right)^3 \Big\{ \frac{1.2.3}{2.4.6}\,\vartheta_c^3 \cos\varphi - \frac{3.4}{2.4}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^4 \cos\varphi + \frac{5}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^5 \cos\varphi \\
& \qquad\qquad - \left(\frac{m}{c}\right)^3 \vartheta_c^6 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^7 \\
& + \frac{1}{8}\left(\frac{m}{c}\right)^4 \Big\{ \frac{2.3.4}{2.4.6}\,\vartheta_c^4 \cos\varphi - \frac{4.5}{2.4}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^5 \cos\varphi + \frac{6}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^6 \cos\varphi \\
& \qquad\qquad - \left(\frac{m}{c}\right)^3 \vartheta_c^7 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^8 \\
& + \frac{1}{9}\left(\frac{m}{c}\right)^4 \Big\{ \frac{1.2.3.4}{2.4.6.8}\,\vartheta_c^4 \cos\varphi - \frac{3.4.5}{2.4.6}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^5 \cos\varphi + \frac{5.6}{2.4}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^6 \cos\varphi \\
& \qquad\qquad - \frac{7}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^3 \vartheta_c^7 \cos\varphi + \left(\frac{m}{c}\right)^4 \vartheta_c^8 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{2c}} - 1\right)^9 \\
& - \frac{1}{10}\left(\frac{m}{c}\right)^5 \Big\{ \frac{1.3.4.5}{2.4.6.8}\,\vartheta_c^5 \cos\varphi - \frac{4.5.6}{2.4.6}\frac{m}{c}\,\vartheta_c^6 \cos\varphi + \frac{6.7}{2.4}\left(\frac{m}{c}\right)^2 \vartheta_c^7 \cos\varphi \\
& \qquad\qquad - \frac{8}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^3 \vartheta_c^8 \cos\varphi + \left(\frac{m}{c}\right)^4 \vartheta_c^9 \cos\varphi \Big\} \left(e^{\frac{s}{c2}} - 1\right)^{10} \\
& + \text{etc., etc.} \Big]
\end{aligned}
$$

La lói de ces termes est facile à saisir.

Lambert 1767

Nouv. Mém. de l'Acad. R. des Sc. et B.L. Pl. II p. 41.

1 : D	Rapport de la densité du milieu à celle de la bombe.
δ	Diametre de la bombe, en pieds de Rhin.
C	Vitesse terminale de la bombe en tombant.
ω	Angle d'élévation, sous lequel la bombe est jettée.
c	Vitesse initiale tangentielle.
K	Vitesse initiale horizontale.
G	Vitesse au sommet.
A	Amplitude du jet.

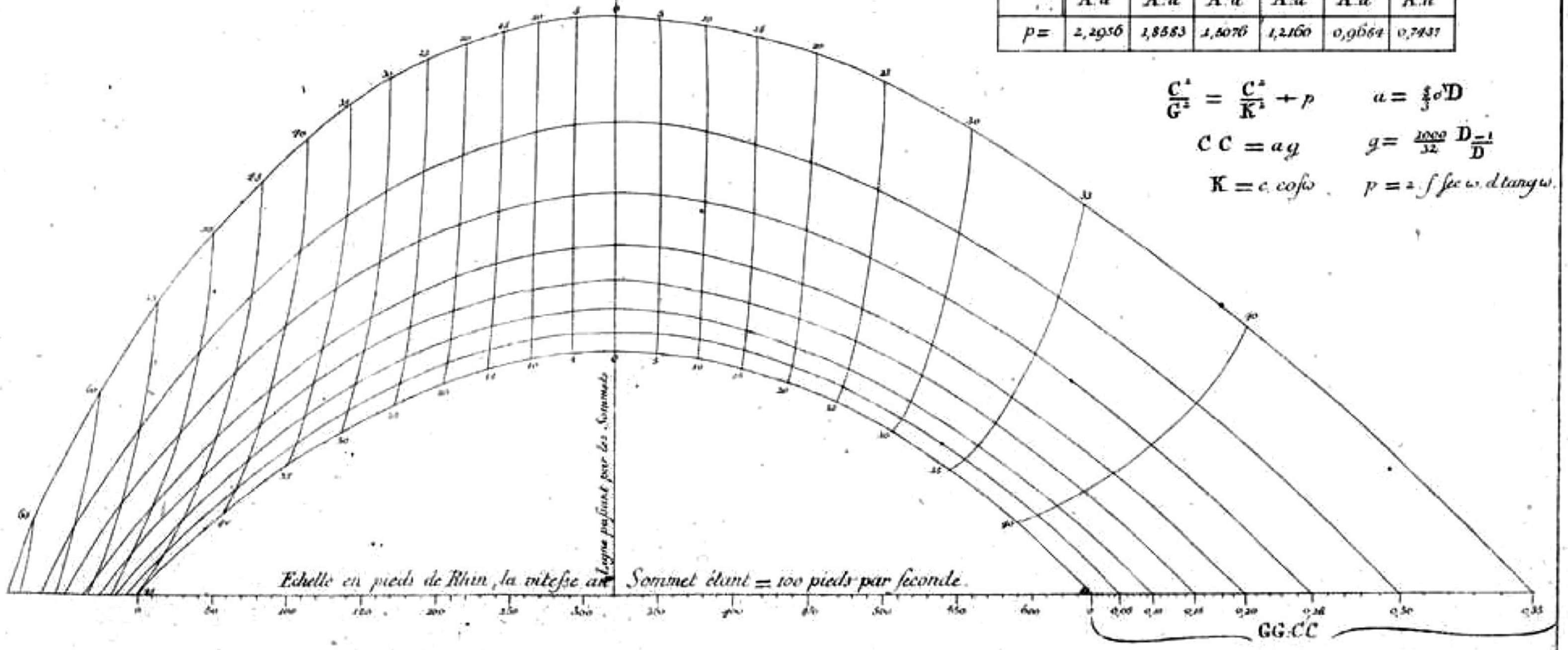
GG:CC	45°	40°	35°	30°	25°	20°
0,05	0,104	0,087	0,072	0,059	0,047	0,037
0,10	0,218	0,181	0,149	0,121	0,097	0,075
0,15	0,344	0,281	0,231	0,185	0,149	0,115
0,20	0,497	0,387	0,316	0,253	0,202	0,156
0,25	0,653	0,512	0,409	0,325	0,256	0,198
0,30	0,857	0,655	0,510	0,401	0,313	0,240
0,35	1,140	0,815	0,621	0,483	0,367	0,283
	A : a	A : a	A : a	A : a	A : a	A : a
p =	2,2956	1,8583	1,5076	1,2160	0,9664	0,7431

$$\frac{C^2}{G^2} = \frac{C^2}{K^2} + p \qquad a = \tfrac{4}{3}\delta D$$

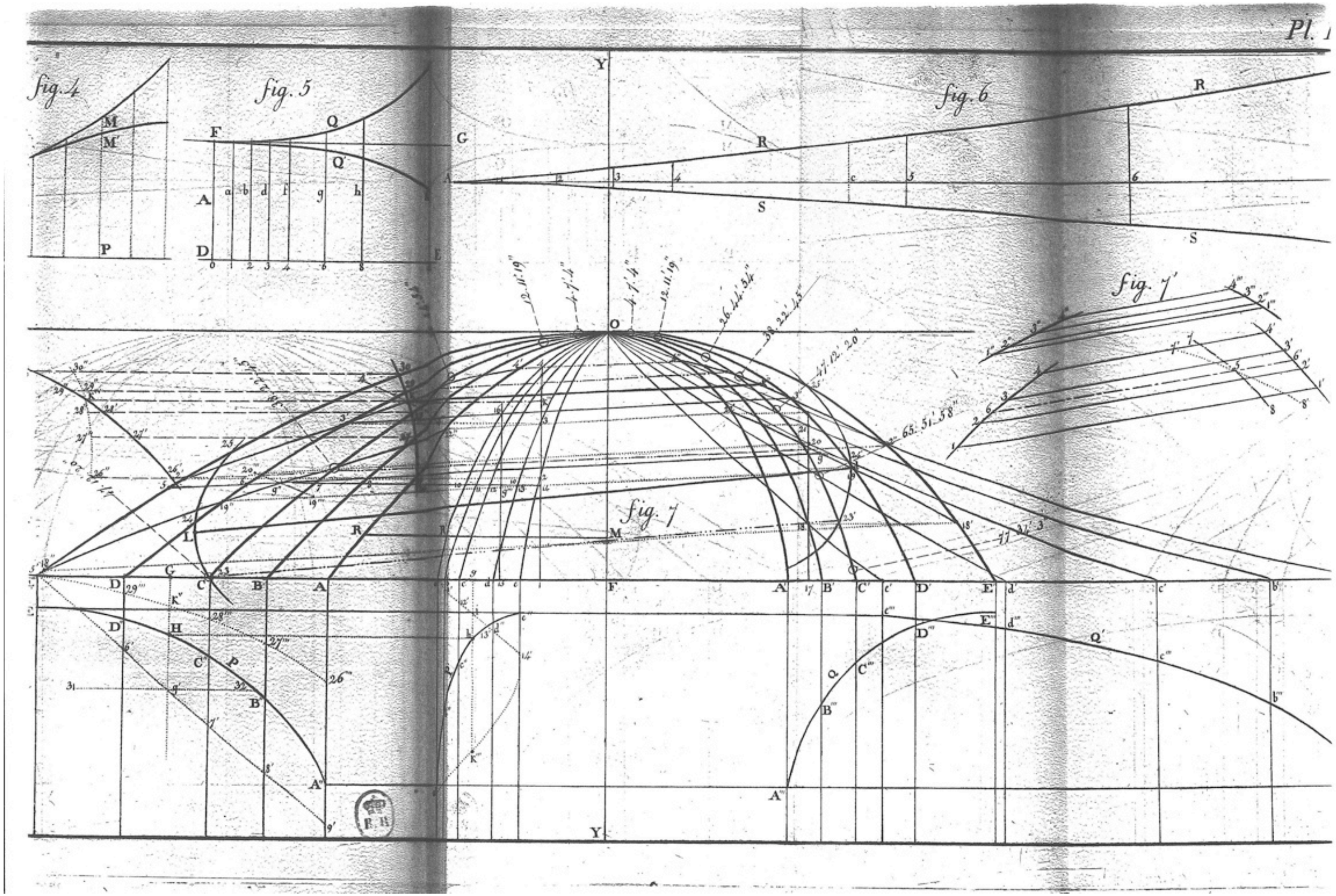
$$CC = ag \qquad g = \tfrac{1000}{32}\,\frac{D-1}{D}$$

$$K = c\,\cos\omega \qquad p = 2\int \sec\omega\, d\tang\omega$$

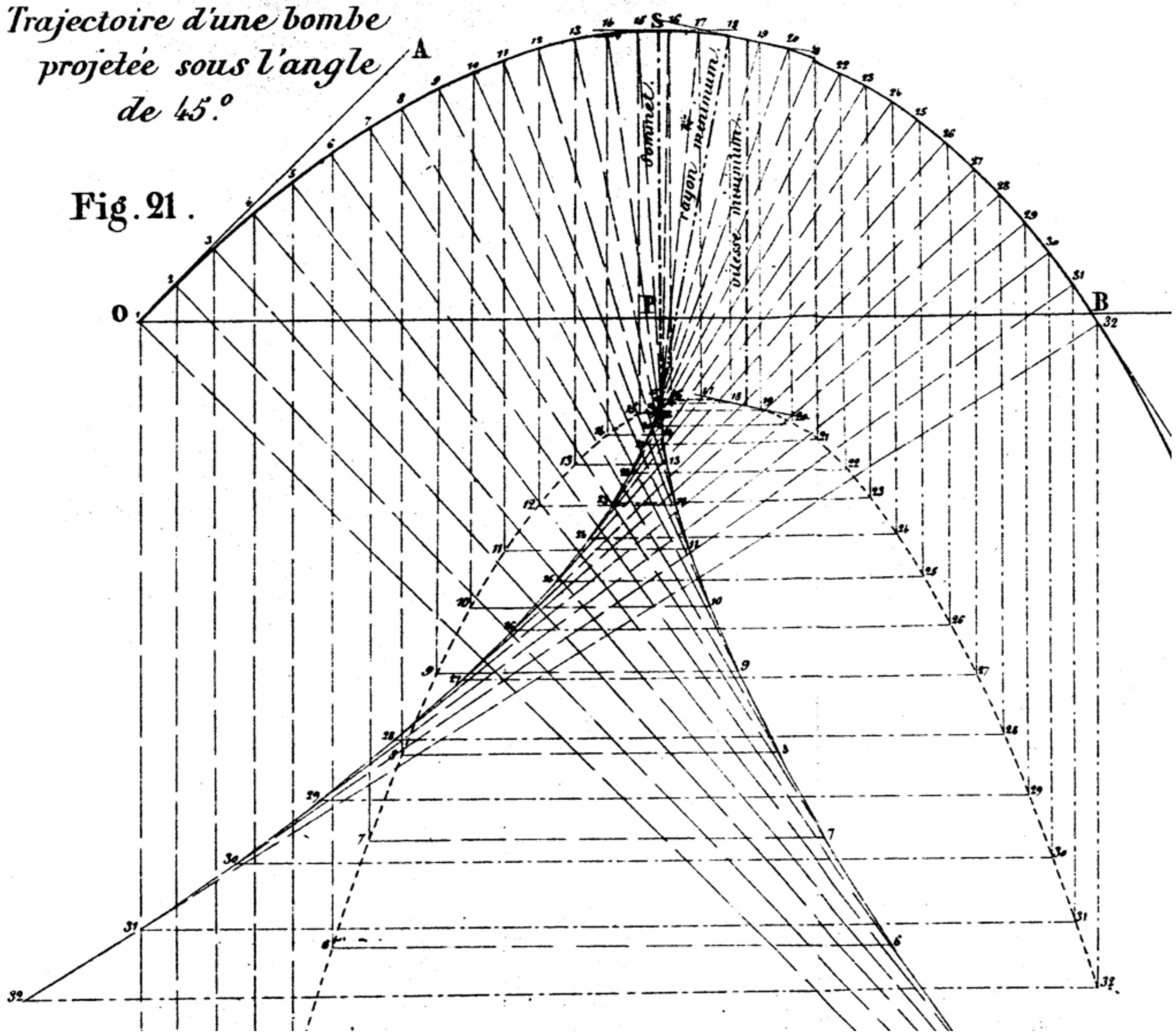
Courbes Ballistiques



Alexandre-Magnus d'Obenheim 1818
"Planchette du canonnier"



Isidore Didion 1848



Strategy 1:
Calculate an approximate integral of the exact differential equation

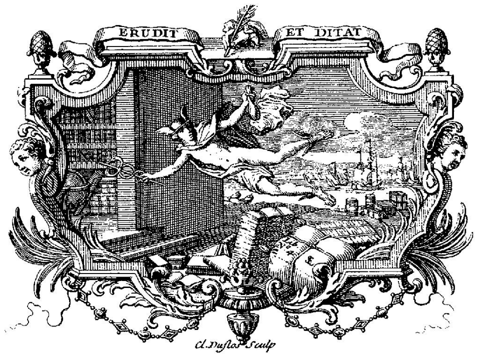
Strategy 2:
Calculate the exact integral of an approximate differential equation

- Choose an air resistance law so that the equation can be solved in finite form
- Accept a given air resistance law and modify the other coefficients so that the equation can be solved in finite form

TRAITÉ
DE L'ÉQUILIBRE
ET DU MOUVEMENT
DES FLUIDES.

Pour servir de suite au Traité de Dynamique.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.



A PARIS,
Chez DAVID, l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

D'Alembert 1744

"It is easy to deduce from formulas that we gave (...) that the resistance of a fluid to the movement of a body is generally as the square of the velocity, all other things being equal. To give more generality in all what we say afterwards, we will assume however that resistance is as a power, or even as any function of the velocity."

"(...) by the method which I used, we see that this problem can be still resolved in cases in which Gentlemen Bernoulli, Herman, Euler, did not mention. (...) As the detail of these cases can interest Geometers, I will explain the way to find them."

Nous trouvons donc par notre Méthode, que la trajectoire dans un milieu réſiſtant eſt toujours conſtructible 1°. lorſque $\varphi u = u^n$, 2°. lorſque $\varphi u = A + u^n$, 3°. lorſque $\varphi u = A + f . Lu$, A, f, & n étant des nombres quelconques, 4°. lorſque $\varphi u = a u^p + R + b u^{-p}$, 5°. lorſque $\varphi u = a (Lu)^2 + R . Lu + b$, pourvû qu'en ces deux derniers cas il y ait un certain rapport entre les coefficiens a, R, b.

Je ne prétends pas, au reſte, qu'il n'y ait que ces ſeuls cas où la trajectoire ſoit conſtructible ; mais je laiſſe à ceux qui aiment ces ſortes de calculs à pouſſer plus loin leurs recherches là-deſſus.

Integration cases found by D'Alembert in 1744:

$$F(v) = a + bv^n$$

$$F(v) = a + b \ln v$$

$$F(v) = av^n + R + bv^{-n}$$

$$F(v) = a(\ln v)^2 + R \ln v + b$$

Integration case found again by Legendre in 1782
(without quoting D'Alembert):

$$F(v) = a + bv^2$$

Integration cases found again by Jacobi in 1842
(quoting Legendre, but not D'Alembert):

$$F(v) = a + bv^n$$

$$F(v) = a + b \ln v$$

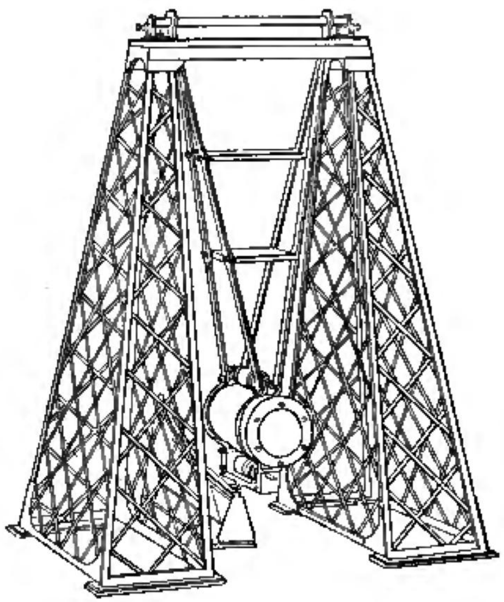
$v < 250$ m

Newton
Euler

$$F(v) = av^2$$

$250 \text{ m} < v < 350$ m

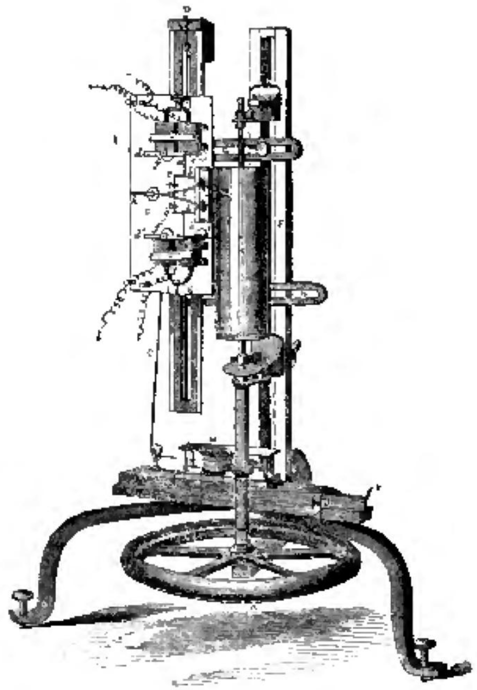
Ballistic pendulum
Isidore Didion
1839



$$F(v) = v^2(a + bv)$$

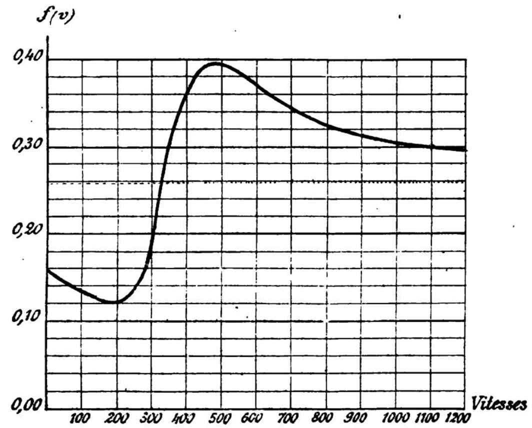
$350 \text{ m} < v < 500$ m

Chronograph
Francis Bashforth
1864



$$F(v) = av^3$$

$250 \text{ m} < v < 500$ m



$$F(v) = av^4$$

37 empirical laws of air resistance (Cranz 1921)

Didion 1839-40, 1856-58	$v^2(a+bv)$
Saint-Robert 1839-40	$v^2(a+bv^2)$
Mayevski 1868-69	$\begin{cases} v^2(a+bv^2) \\ av^6 \\ av^2 \end{cases}$
Hélie	av^2
Bashforth 1866-70	av^3
Hojel 1884	$av^n \quad (n = 2.5, 5, 3.83, 1.77, 1.91)$
Sabudski 1875-81, 1866-70, 1868-69	$av^n \quad (n = 2, 3, 3, 2, 1.7, 1.55)$
Chapel 1874 Vallier 1894 Scheve 1907	$\begin{cases} a+bv \\ av^5 \\ av^{2.5} \end{cases}$
Siacci 1896	$av + b + \sqrt{cv^2 + dv + e} + \dfrac{v(fv+g)}{h + iv^{10}}$

Integration cases found by Francesco Siacci in 1901:

$$\text{(I)} \quad e^{a\int\rho\,du} = e^{au}\,F(h, k, -u) + C e^{-au}\,F(k, h, u) \quad (b = h - k,\ n = 1 + h + k);$$

$$\text{(II)} \quad (au)^{-n} e^{a\int\rho\,du} = e^{au}\,F(h, k, -u) + C e^{-au}\,F(k, h, u) \quad (b = h - k,\ n = -1 - h - k);$$

$$\text{(III)} \quad u = a(\rho + 1)^c + b(\rho - 1)^c,$$

$$\text{(IV)} \quad cu = (\rho + 1 + 2a)^a(\rho - 1 - 2b)^b[(a + b + 2)\rho + a - b],$$

$$\text{(V)} \quad Cu = \frac{e^{\frac{c}{2}\int\frac{d\rho}{1+a(\rho-1)^c}}}{1 + \alpha(\rho - 1)^c},$$

$$\text{(VI)} \quad Cu = \frac{e^{-\frac{c}{2}\int\frac{d\rho}{1+b(\rho+1)^c}}}{1 + b(\rho + 1)^c},$$

$$\text{(VII)} \quad \frac{\alpha}{(\rho + 1)^2} + \frac{b}{(\rho - 1)^2} = u^2\rho + cu,$$

$$\text{(VIII)} \quad \log\int u\,d\rho = \frac{c}{2}\int\frac{d\rho}{1 + a(\rho - 1)^c} - \frac{c}{2}\int\frac{d\rho}{1 + b(\rho + 1)^c} + C.$$

$$\text{(1)} \quad \rho = Au\sqrt{zc + u^2} + B(c + u^2).$$

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \rho = 1 + \dfrac{(\gamma + 1)^\beta}{(\gamma - 1)^\alpha}\left[\gamma + 2\beta\displaystyle\int\frac{(\gamma - 1)^\alpha}{(\gamma + 1)^{\beta+1}}\right], \\ Cu^2 = \dfrac{e^{2\int\frac{\rho\,d\gamma}{\gamma^2 - 1}}}{\gamma^2 - 1}. \end{cases}$$

Jules Drach

« L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures »

Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 37 (1920), p. 1-94

Ballistic equation put on the form $\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho(u)}$

Application of his 1914 systematic study of reducible cases for equations

$\frac{dy}{dx} = \frac{P(y)}{Q(y)}$ where P and Q are polynomials with coefficients in x

All previous integrability cases (D'Alembert, Legendre, Jacobi, Siacci) are found again

Jean-Charles de Borda

« Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes en ayant égard à la résistance de l'air »

Histoire de l'Académie royale des sciences

1769

$$\mathrm{d}s\,\mathrm{dd}y = a\,\mathrm{d}^3 y$$

$$\frac{\Delta}{\mathrm{D}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{dd}y = a\,\mathrm{d}^3 y$$

D = fluid density at origin
Δ = fluid density at current point

" I guess now we give such a value Δ that the equation is integrable, it is clear that if this value of Δ does not stray much from a constant quantity, the curve that will be found by integration, will depart very little from the required curve."

1) $$\frac{\Delta}{D} = \frac{n\,dx}{ds}$$ (angle < 45°) $$n = \frac{1}{\cos\theta_0}$$

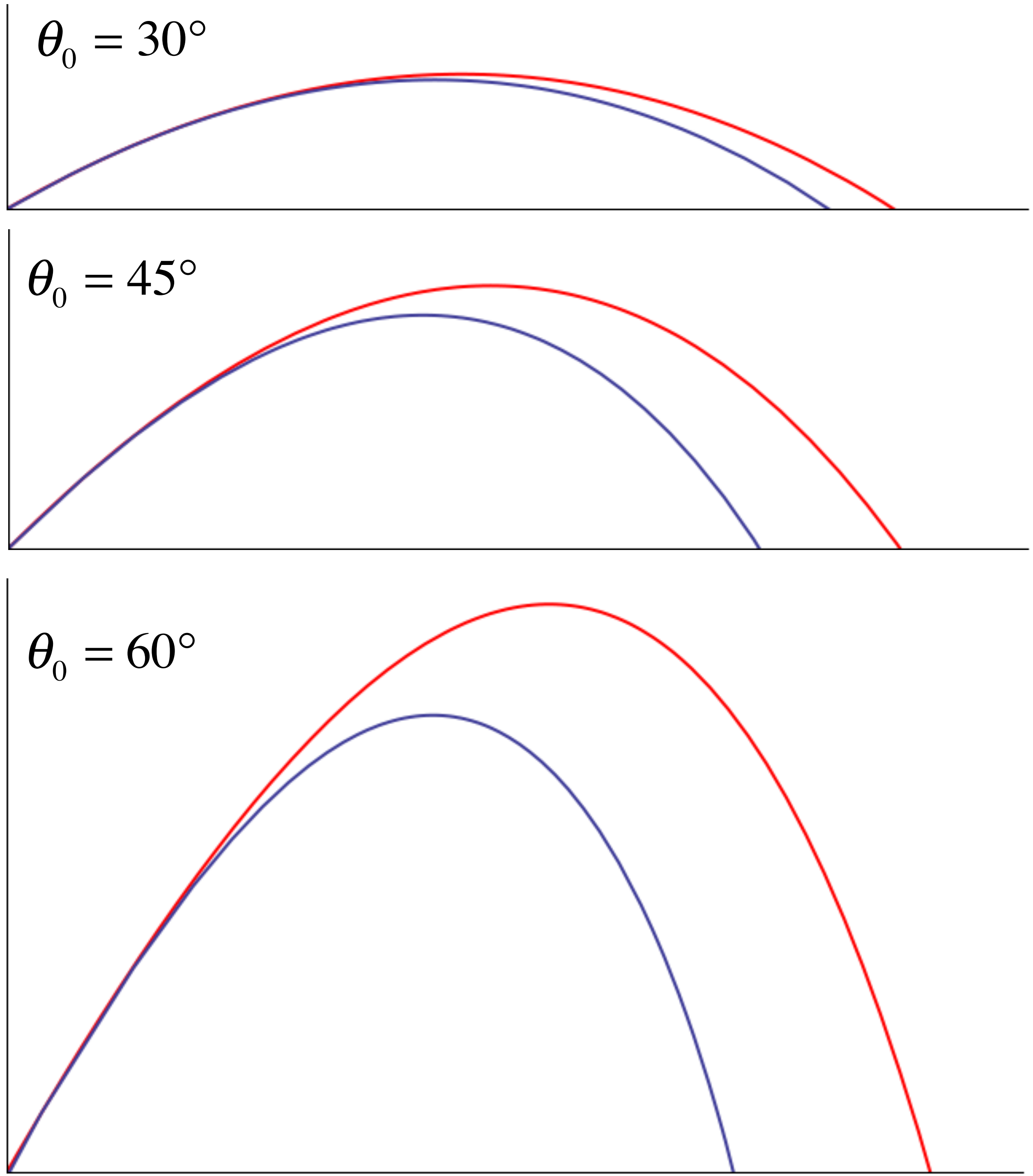
2) $$\frac{\Delta}{D} = \frac{m\,dy}{ds}$$ (angle > 45°)

3a) $$\frac{\Delta}{D} = \frac{n\,dx + m\,dy}{ds}$$ (ascending branch)

3b) $$\frac{\Delta}{D} = \frac{\nu\,dx - \mu\,dy}{ds}$$ (descending branch)

Blue: exact curve

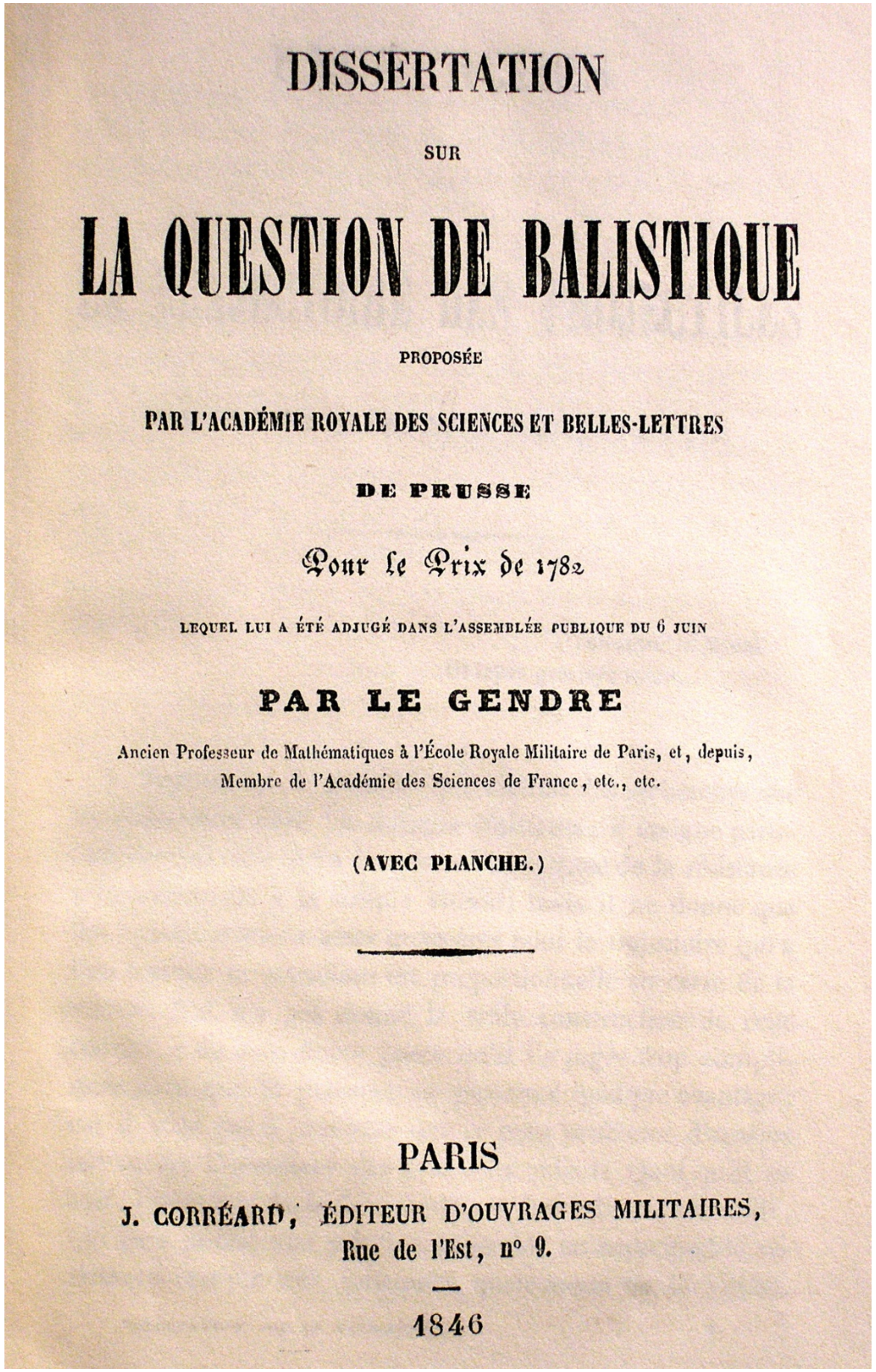
Red: approximation with first Borda's method



Adrien-Marie Legendre

1782 : Prize of the Berlin Academy

“Determine the curve described by cannonballs and bombs, by taking the air resistance into account; give rules to calculate range that suit different initial speeds and different angles of projection.”



DISSERTATION

SUR

LA QUESTION DE BALISTIQUE

PROPOSÉE

PAR L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE PRUSSE

Pour le Prix de 1782

LEQUEL LUI A ÉTÉ ADJUGÉ DANS L'ASSEMBLÉE PUBLIQUE DU 6 JUIN

PAR LE GENDRE

Ancien Professeur de Mathématiques à l'École Royale Militaire de Paris, et, depuis, Membre de l'Académie des Sciences de France, etc., etc.

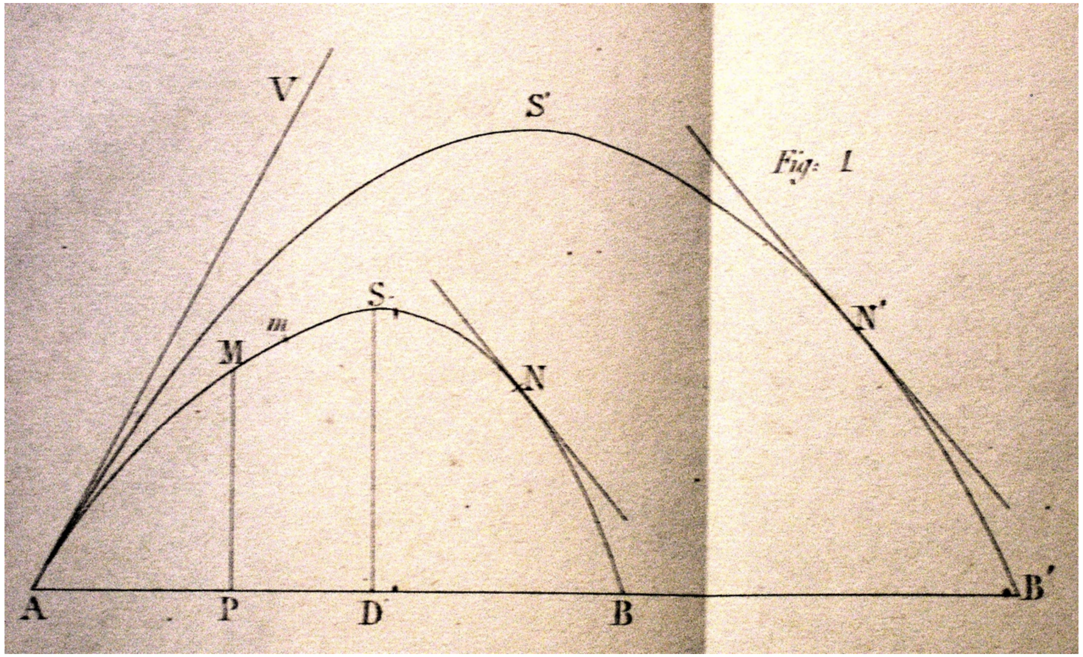
(AVEC PLANCHE.)

PARIS

J. CORRÉARD, ÉDITEUR D'OUVRAGES MILITAIRES,

Rue de l'Est, n° 9.

1846



$$AP = x$$

$$PM = y$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

θ_0, h, k : constants

$$\frac{dx}{2k} = \frac{-dp}{\frac{k}{h\cos^2\theta_0} + \frac{\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0} + \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\left(45^\circ + \frac{\theta_0}{2}\right) - p\sqrt{1+p^2} - \mathrm{L}\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}$$

$$dy = p\,dx$$

First method = Euler's method

Second method (inspired by Borda)

$$\frac{1}{k} \approx \frac{1}{k} \frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}$$

Third method (inspired by Borda)

- Ascending branch : $$\frac{1}{k} \approx \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha p}} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{with} \quad \alpha = \sin\theta_0 \cos\theta_0$$
- Descending branch : $$\frac{1}{k} \approx \frac{1}{k} \frac{1+\alpha p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$$

10 tables
for *h* from 1 to 10

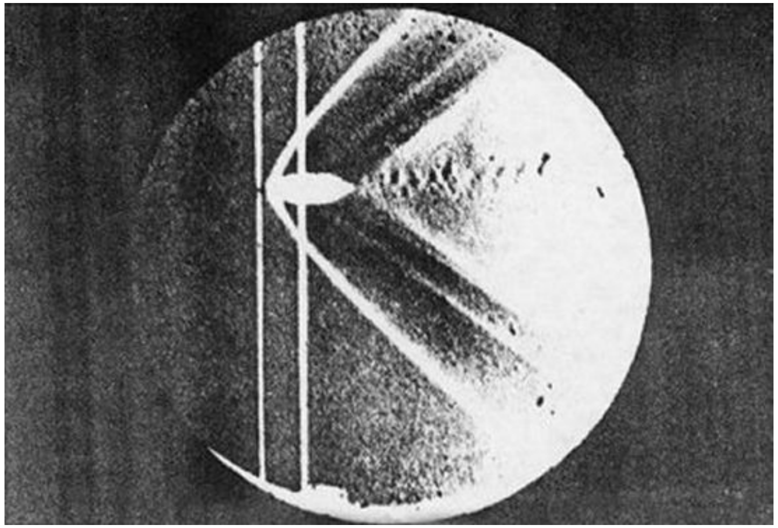
TABLES

pour déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu d'une densité uniforme, la résistance étant proportionnelle au carré de la vitesse.

(Voyez l'article 83.)

TABLE I. $h = 1$.

Angles de project^n.	Amplitude de la branche ascendante.	Hauteur du jet.	Hauteur due à la vitesse au sommet.	Amplitude de la branche descend^{te}.	Amplitude totale.
5°	0,1601	0,0072	0,8454	0,1519	0,3120
10	0,2936	0,0272	0,7217	0,2676	0,5612
15	0,4029	0,0577	0,6196	0,3558	0,7588
20	0,4919	0,0971	0,5330	0,4223	0,9142
25	0,5595	0,1432	0,4581	0,4711	1,0306
30	0,6078	0,1945	0,3923	0,5040	1,1119
35	0,6379	0,2494	0,3336	0,5233	1,1612
40	0,6507	0,3065	0,2807	0,5302	1,1809
45	0,6474	0,3647	0,2328	0,5253	1,1727
50	0,6289	0,4227	0,1892	0,5096	1,1386
55	0,5966	0,4800	0,1496	0,4834	1,0800
60	0,5514	0,5362	0,1139	0,4466	0,9981



Painlevé
"There is no hope of finding an elementary law of air resistance."

Charbonnier 1924
"There is no longer need to race after the finite equation of the trajectory that preoccupied almost exclusively ballisticians in the past."

Cranz 1921
"The tendency which predominates, nowadays, is to improve the methods of numerical calculation, rather than to improve the analytical study of differential equations."