Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 16/10/2018

1. *Esercizio 1, compito del 01/02/2017 (Prof. Rodriguez)*

   Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

   verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e B.

   SOLUZIONE.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}$$

   $LM = I$ per $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

   Assegnati i valori trovati si ha

$$A^{-1} = L^{-1}Q^{-1} = MQ^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & -\frac{48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -1, \quad \det(B) = 1.$$

2. *Esercizio 5, compito del 19/06/2018 (Dott.ssa Fenu)*

   Dati i tre numeri

$$a = 17,723 \cdot 10^{-2} \quad b = 371,843 \cdot 10^{-3} \quad c = 2,39 \cdot 10^{-1}$$

   si calcolino le quantità

$$t_1 = (b - a) \cdot c \quad \text{e} \quad t_2 = b \cdot c - a \cdot c$$

   nell'insieme $\mathbb{F}(10, 4, -12, 12)$. Infine, si commentino i risultati ottenuti in termini di errore relativo giustificando quale scelta risulterebbe più conveniente effettuare.

SOLUZIONE.

$\mathrm{fl}(t_1) = 0.424 \cdot 10^{-1} = \mathrm{fl}(t_2)$ e $\rho_1 = \rho_2 = 0.269 \cdot 10^{-13}$ da cui segue che le due scelte sono equivalenti.

3. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Si determinino i valori di β che rendono la matrice B l'inversa di A e i valori di α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

SOLUZIONE. $\beta = \frac{1}{2}$, C è non sngolare per ogni $\alpha \neq 0, 1$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -(1+\alpha) & -\alpha \\ 0 & 1 & 1+\alpha \\ 2+\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{è ortogonale per } \alpha = -1.$$

$\sigma(D) = \{-1, 1, 1\} = \sigma(D^{-1})$, $\rho(D) = 1 = \rho(D^{-1})$.

4. Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A e il suo raggio spettrale.

SOLUZIONE.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4\alpha & 0 & \alpha+4 \end{bmatrix},$$

A è simmetrica per $\alpha = 1$ mentre $U = M^{-1}$ per $\beta = -\frac{1}{8}$.

Assegnati tali valori l'inversa di A sarà

$$A^{-1} = (LM)^{-1} = (M^T M)^{-1} = M^{-1}(M^{-1})^T = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4}. \end{bmatrix}$$

5. Dire per quali valori del parametro reale α la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

è invertibile e quali valori risulta definita positiva.

SOLUZIONE.

A è invertibile per $\forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, \pm\sqrt{2}\}$ e definita positiva per $\alpha > \sqrt{2}$.