Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 24/10/2018

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$
calcolarne il numero di condizionamento in norma 2 al variare del parametro reale β.

   SOLUZIONE.
$$k_2(A) = \begin{cases} \frac{3+2\sqrt{2}}{|\beta|}, & \text{se} \quad |\beta| < 3 - 2\sqrt{2} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}, & \text{se} \quad 3 - 2\sqrt{2} < |\beta| < 3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{|\beta|}{3-2\sqrt{2}}, & \text{se} \quad |\beta| > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

2. Calcolare i numeri di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   SOLUZIONE.
$$k_1(A) = 25/9, \quad k_\infty(A) = 16/9, \quad k_2(A) = \sqrt{\frac{20+\sqrt{76}}{20-\sqrt{76}}}.$$

3. *Esercizio 1, prova parziale di CSMN del 10/11/2017*

   Stabilire per quali valori dei parametri α e β le matrici
$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \beta \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
risultano ortogonali e , assegnati i valori trovati, calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di intrambe. Infine risolvere nel modo più opportuno il sistema lineare $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

   SOLUZIONE.

P è ortogonale per $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ mentre Q è ortogonale se $\beta = -2$. Quindi, assegnati tali valori, $k_2(P) = 1 = k_2(Q)$. Essendo Q anche simmetrica si ha che $k_1(Q) = k_\infty(Q) = 25/9$. Poi si ha

$$k_1(P) = k_\infty(P) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{b} = Q^T\mathbf{b} = Q\mathbf{b} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}.$$

4. *Esercizio 2, compito del 31/01/2018*

Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\a & 1 & 0\\b & c & 1\end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile. Si calcoli il prodotto LL^T e si determinino i valori dei parametri a, b e c che rendono M l'inversa di L. Sfruttando i calcoli fatti, si deduca l'inversa di A. Assegnati ai parametri i valori a e b trovati, si calcolino le norme 1 e ∞ della matrice M al variare di c.

SOLUZIONE.

A è invertibile dato che $\det(A) = 1$.

$$LL^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix} = A,$$

i valori dei parametri cercati sono $a = -1$, $b = 0$ e $c = -1$,

$$A^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\|M\|_1 = \begin{cases}2 \quad \text{se} \quad -1 < c < 1\\ 1 + |c| \quad \text{se} \quad c < -1, \quad c > 1\end{cases},$$

$$\|M\|_\infty = \begin{cases}2 \quad \text{se} \quad -1 < c < 1\\ 1 + |c| \quad \text{se} \quad c < -1, \quad c > 1\end{cases}.$$

5. *Esercizio 2, compito del 18/09/2018*

Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & \beta & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

e si determinino i valori dei parametri reali α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle due matrici in norma 1 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

SOLUZIONE.

$\alpha - 1$, $\beta = 3$. Asseganti tali valori si ha

$$k_1(A) = \frac{25}{2} = k_1(B), \quad k_\infty(A) = 16 = k_\infty(B).$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = B\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$