Esercitazione 26/01/2018

1. Si consideri il seguente sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$ con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Dire per quali valori del parametro A è non invertibile. Determinare i valori di a per cui il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato $a = 2$ calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{b}$.

   Soluzione. A non è invertibile per $a = \pm\sqrt{7}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$. ponendo $a = 2$ le prime due iterazioni del metodo di Jacobi sono:
$$\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} = [-1, 1/4, -1/2]^T, \quad \mathbf{x}^{(\mathbf{2})} = [-1/4, 7/8, -1/8]^T.$$

2. Si considerino le matrici
$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 01/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
dire per quali valori di a la matrice A risulta non invertibile. Fissato $a = 1$ si calcolino lo spettro e il raggio spettrale di A e per quali valori di b la matrice $C = LU$ è l'inversa di A. Fissato tale valore di b, motivando la risposta si dica qual è lo spettro di C^2, il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2.

   Soluzione. A è non invertibile per $a = 2$ e $a = 3$. Posto $a = 1$ lo spettro e il raggio spettrale di A sono
$$\sigma(A) = \{-1, 2 \pm 2i\}, \quad \rho(A) = 2\sqrt{2}.$$
La matrice C data da
$$C = LU = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -b & b & 1/2 \end{bmatrix}$$
è l'inversa di A per $b = \frac{1}{4}$. Considerando quindi $b = \frac{1}{4}$ è immediato calcolare lo spettro di C che ci servirà per calcolare quello di C^2:
$$\sigma(C) = \sigma(A^{-1}) = \left\{-1, \frac{1 \pm i}{4}\right\}, \quad \text{da cui troviamo} \quad \sigma(C^2) = \left\{-1, \frac{\pm i}{8}\right\} \quad \rho(C^2) = \frac{1}{8}.$$
Infine si ha
$$\det(AC^2) = \det(A)\det(C^2) = -(2-2i)(2+2i)\left(-\frac{i}{8}\right)\left(\frac{i}{8}\right) = -\frac{1}{8}.$$

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^4 - 3x^2 = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza dei due metodi.

Soluzione. La radice α dell'equazione non lineare data appartiene all'intervallo $[1, 2]$. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{3}{2}, \quad f(1)f(c_0) > 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [3/2, 2]$$

$$c_1 = \frac{7}{4}, \quad f(3/2)f(c_1) < 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [3/2, 7/4]$$

$$c_2 = \frac{13}{8}.$$

Le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato sono

$$x_1 = 9/5 \quad x_2 \simeq 1.7379.$$

La radice è semplice quindi il metodo di Newton ha ordine $p = 2$, mentre il metodo di bisezione ha sempre ordine di convergenza $p = 1$.

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -8 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema lineare è $\mathbf{x} = [-1, 0, 1, 1]^T$ e $\det(A) = 64$.

5. Dati i 3 numeri $a = 0.01234$, $b = 0.12345$, $c = 0.12344$ si calcolino le quantità $s_1 = (a+b) - c$ e $s_2 = a + (b - c)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa con 4 cifre significative. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. Convertendo a, b e c nel sistema in virgola mobile dato otteniamo

$$fl(a) = 0.1234 \cdot 10^{-1}, \quad fl(b) = 0.1235 \cdot 10^{0}, \quad fl(c) = 0.1234 \cdot 10^{0}.$$

Notiamo che, avendo dovuto effettuare arrotondamenti nella conversione di b e c ci si aspetta un errore relativo non nullo sia per $s_1 = (a+b) - c$ che per $s_2 = a + (b - c)$. Calcolando $(a+b)$ si ha

$$0.01234 \cdot 10^{0} + 0.1235 \cdot 10^{0} = 0.13584 \cdot 10^{0}$$

effettuando un altro arrotondamento per convertire tale somma otteniamo $fl(a+b) = 0.1358 \cdot 10^{0}$ a cui andiamo a sottrarre c trovando

$$0.1358 \cdot 10^{0} - 0.1234 \cdot 10^{0} = 0.0124 \cdot 10^{0}.$$

Passando al calcolo della quantità s_2 procediamo con la sottrazione $(b - c)$

$$0.1235 \cdot 10^{0} - 0.1234 \cdot 10^{0} = 0.0001 \cdot 10^{0}$$

che sommato ad a darà

$$0.0001 \cdot 10^{0} + 0.1234 \cdot 10^{0} = 0.01244 \cdot 10^{0} = 0.1244 \cdot 10^{-1}.$$

Per quando riguarda la valutazione dell'errore relativo consideriamo il valore esatto $x = 0.0123 \cdot 10^{0} = 0.123 \cdot 10^{-1}$ e quindi

$$\rho_{s_1} = 0.004,$$

$$\rho_{s_2} = 0.0073.$$