ESERCITAZIONE 1

1. Si consideri il vettore $\mathbf{v} = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]^T$ e si calcoli la sua norma ∞,1 e 2. Si considerino poi le matrici

$$A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \beta \\ 0 & \beta & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determini il valore di β che rende B l'inversa di A, si dica se C è una matrice ortogonale e si determini la sua inversa. Si calcoli lo spettro e il raggio spettrale di A e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di B e di B^2 se a β si assegna il valore trovato.

Soluzione. Calcoliamo le norme di $\mathbf{v}$ richieste

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Determiniamo A come

$$A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & -5/3 \end{bmatrix}.$$

Per trovare i valori di β per cui B è l'inversa di A possiamo procedere in due modi:

- calcoliamo $A \cdot B$ e imponiamo che sia uguale alla matrice identità;
- calcoliamo l'inversa di A e imponiamo l'uguaglianza delle sue componenti con quelle di B e ricaviamo β.

Nel primo modo otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & -5/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/7 & \beta/7 \\ 0 & \beta/7 & -1/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} - \frac{4}{21}\beta & \frac{\beta}{21} + \frac{4}{21} \\ 0 & -\frac{20}{21} - \frac{5}{21}\beta & -\frac{4}{21}\beta + \frac{5}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui ricaviamo, eguagliando le componenti, che $\beta = -4$. Nel secondo modo invece calcoliamo l'inversa di A tramite il metodo dei cofattori come
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{cof}(A))^T$$
dove $\mathrm{cof}(A)$ è la matrice dei cofattori data da

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} -\frac{21}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

da cui segue che
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{21} & -\frac{4}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$
Dall'uguaglianza con le componenti di B si trova

$$\frac{\beta}{7} = -\frac{4}{7}$$

da cui $\beta = -4$.

C è ortogonale, infatti $CC^T = I$ e quindi $C^{-1} = C^T$.

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Lo spettro e il raggio spettrale di A sono dati quindi da

$$\sigma(A) = \left\{1, 1, -\frac{7}{3}\right\}, \quad \rho(A) = \frac{7}{3}$$

mentre, sfruttando le proprietà dello spettro si ricava immediatamente che
$$\sigma(B) = \left\{1, 1, -\frac{3}{7}\right\}, \quad \sigma(B^2) = \left\{1, 1, \frac{9}{49}\right\}.$$

2. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{2} & 0 \\ \beta & \gamma & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

verificare che A è invertibile, determinare la matrice $C = AA^T$ e calcolare il suo determinante. Determinare i parametri α, β, γ che rendono B l'inversa di A e dedurre l'inversa di C.

Soluzione. Si osservi che la matrice A è triangolare inferiore quindi segue immediatamente che $\det(A) = 8$ e quindi A è invertibile. La matrice C è data da

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 10 & 29 & 7 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix};$$

il suo determinante di può calcolare sfruttando la formula di Binet e il fatto che il determinante di una matrice e della sua trasposta coincidono come:

$$\det(C) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = 64.$$

Per determinare i valori dei parametri α, β, γ per cui B è l'inversa di A procediamo col calcolare il prodotto AB e imponiamo che questo sia pari alla matrice identità I:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{2} & 0 \\ \beta & \gamma & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dal calcolo segue che $\alpha = -\frac{5}{4}$, $\beta = \frac{3}{8}$ e $\gamma = -\frac{1}{4}$.

Per determinare l'inversa di C osserviamo che $C = AA^T$ e che per i valori dei parametri trovati B è l'inversa di A quindi

$$C^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1} = B^T B.$$

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β la matrice B è la matrice inversa di A. Fissato un tale valore si determini al variare di α il numero di condizionamento di A con indici 1, 2, ∞.

Soluzione. A è invertibile quando

$$\det(A) = 5\alpha \neq 0$$

quindi per $\alpha \neq 0$. Osserviamo che A è simmetrica e ogni matrice simmetrica definita positiva ha tutti gli autovalori strettamente positivi. Calcoliamo quindi gli autovalori come radici del polinomio caratteristico di A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\alpha - \lambda)[(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1] = 0$$

da cui otteniamo

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2},$$

ricavando che A è definita positiva per $\alpha > 0$.

Per determinare per quali valori di β B è l'inversa di A procedendo come gli esercizi precedenti, si ricava $\beta = \frac{1}{5}$.

Essendo A simmetrica, la norma 1 e la norma ∞ coincidono quindi calcoliamo solo il numero di condizionamento di A con indice 1.

Procediamo col calcolo delle norme 1 di A e della sua inversa (per il valore $\beta = 1/5$ fissato):

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{\alpha, 3, 4\} = \max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \|B\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{3} |b_{ij}| = \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\} = \max_i \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = \|A^{-1}\|_\infty.$$

Quindi si ottiene

$$k_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \begin{cases} \frac{4}{\alpha} & \text{se} \quad \alpha < \frac{5}{4} \\ \frac{16}{5} & \text{se} \quad \frac{5}{4} < \alpha < 4 \\ \frac{4\alpha}{5} & \text{se} \quad \alpha > 4 \end{cases}$$

Essendo A simmetrica il suo numero di condizionamento in norma 2 si calcola tramite la formula:

$$k_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

quindi considerando che lo spettro di A è $\sigma(A) = \left\{\alpha, \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$ si trova

$$k_2(A) = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{2\alpha} & \text{se} \quad \alpha < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} & \text{se} \quad \frac{5-\sqrt{5}}{2} < \alpha < \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2\alpha}{5-\sqrt{5}} & \text{se} \quad \alpha > \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$