

Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 13/11/2018

1. *Esercizio 4, prova scritta di CSMN del 18/09/2018*

Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

SOLUZIONE

La fattorizzazione $PA = LU$ è data dalle matrici

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{36}{7} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione del sistema e la seconda colonna dell'inversa sono rispettivamente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{36} \\ -\frac{5}{36} \\ \frac{7}{36} \end{bmatrix}.$$

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A , la terza colonna della sua inversa e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [2, -2, 1, -1]^T$.

SOLUZIONE.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1, \quad \mathbf{x}^{(3)} = [0, -1, 2, -1]^T, \quad \mathbf{x} = [-1, 2, -3, 0].$$