Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 28/11/2018

1. *Esercizio 1, prova scritta di CSMN del 31/01/2018*

   Si consideri il seguente sistema lineare

   $$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 3 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

   dove a è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro la matrice dei coefficienti del sistema è non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema converge. Posto poi $a = \frac{1}{2}$, si calcoli la prima iterata del metodo di Gauss-Seidel a partite da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ non nullo.

   Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $a = \frac{1}{2}$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

   SOLUZIONE

   A è non singolare per $a \neq \pm 1$ e definita positiva per $-1 < a < 1$. Il metodo di Jacobi converge per $-1 < a < 1$.

2. *Esercizio 2, prova scritta di CSMN del 17/07/2018*

   Data la matrice

   $$B = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

   dire per quali valori dei parametri reali α e β:

   (a) la matrice B è non singolare;

   (b) la matrice B è ortogonale.

   Fissato $\alpha = \frac{1}{2}$ dire per quali valori del parametro β:

   (c) la matrice B è strettamente diagonalmente dominante;

   (d) il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato alla risoluzione di un sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

   SOLUZIONE.

   (a) la matrice B è non singolare per $\alpha \neq \pm\sqrt{\beta}$ e $\beta \neq 0$;

(b) la matrice B è ortogonale per $\alpha = 0$ e $\beta = \pm 1$.

Fissato $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha che

(c) la matrice B è strettamente diagonalmente dominante quando $|\beta| > \frac{1}{2}$ quindi per $\beta < -\frac{1}{2} \vee \beta > \frac{1}{2}$;

(d) il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $\beta < -\frac{1}{4} \vee \beta > \frac{1}{4}$.

3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è non invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

SOLUZIONE.

A è invertibile per $\alpha = 0, 2$. Il metodo di Jacobi è convergente per $-2 < \alpha < 2$. Fissato $\alpha = 1$ le due iterate di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, \frac{1}{2}, 0]^T = \mathbf{x}^{(2)}$.

4. Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Fissato $\beta = \frac{1}{2}$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

SOLUZIONE. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette un'unica soluzione per i valori di β per cui la matrice dei coefficienti è non singolare, cioè per $\beta \neq 0, \pm 1$. Il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $-1 < \beta < 1$. Posto $\beta = \frac{1}{2}$, le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = -[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = -[\frac{5}{4}, 0, \frac{5}{4}]^T$