ESERCITAZIONE 3 (08/11/2017)

1. Calcolare le somme $s_1 = (a+b)+c$ e $s_2 = a+(b+c)$ essendo

$$a = 2122, \quad b = 7877, \quad c = -7872,$$

in un sistema in virgola mobile $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ con $\beta = 10$, $U = -L = 4$ e con $t = 4$ oppure $t = 3$ commentando i risultati ottenuti.

<u>**Soluzione.**</u>

Convertendo i numeri nel sistema in virgola mobile richiesto prendendo il caso $t = 4$ ad esempio, otteniamo

$$fl(a) = 0.2122 \cdot 10^4, \quad fl(b) = 0.7877 \cdot 10^4, \quad fl(c) = -0.7872 \cdot 10^4.$$

Procediamo col calcolo di $a+b$ a cui poi sommeremo c

$$0.2122 \cdot 10^4 + 0.7877 \cdot 10^4 = 0.9999 \cdot 10^4$$

osservando che nel sistema richiesto con 4 cifre significative non occorre effettuare arrotondamento. Sommando c otteniamo

$$0.9999 \cdot 10^4 - 0.7872 \cdot 10^4 = 0.2127 \cdot 10^4.$$

Non avendo dovuto effettuare arrotondamenti possiamo osservare che l'errore relativo nel caso della quantità $s_1 = (a+b)+c$ sarà nullo. Lo stesso si otterrà nel calcolo di $s_2 = a+(b+c)$ tenendo conto che il risultato della somma dei tre numeri dato sarebbe $x = 2127$ e anche per la seconda quantità da calcolare non verranno effettuati arrotondamenti:

$$fl(b+c) = 0.7877 \cdot 10^4 - 0.7872 \cdot 10^4 = 0.0005 \cdot 10^4$$

$$0.2122 \cdot 10^4 + 0.0005 \cdot 10^4 = 0.2127 \cdot 10^4.$$

Nel caso in cui si considerino $t = 3$ cifre significative l'errore relativo sarà pari a 0.0014 sia nel caso di s_1 che in quello di s_2.

2. Dati i 3 numeri $a = 0.02345$, $b = 0.23456$ e $c = 0.23454$ si calcolino le quantità $(a+b)-c$ e $a+(b-c)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 4 cifre significative. Commentare i risultati.

<u>**Soluzione.**</u>

Convertendo a, b e c nel sistema in virgola mobile dato otteniamo

$$fl(a) = 0.2345 \cdot 10^{-1}, \quad fl(b) = 0.2346 \cdot 10^0, \quad fl(c) = 0.2345 \cdot 10^0.$$

Notiamo che, avendo dovuto effettuare arrotondamenti nella conversione di b e c ci si aspetta un errore relativo non nullo sia per $q_1 = (a+b) - c$ che per $q_2 = a + (b - c)$. Calcolando $(a + b)$ si ha

$$0.02345 \cdot 10^0 + 0.2346 \cdot 10^0 = 0.25805 \cdot 10^0$$

effettuando un altro arrotondamento per convertire tale somma otteniamo $fl(a + b) = 0.2581 \cdot 10^0$ a cui andiamo a sottrarre c trovando

$$0.2581 \cdot 10^0 - 0.2345 \cdot 10^0 = 0.0236 \cdot 10^0$$

quindi si ha $fl(q_1) = 0.0236 \cdot 10^0$. Passando al calcolo della quantità q_2 procediamo con la sottrazione $(b - c)$

$$0.2346 \cdot 10^0 - 0.2345 \cdot 10^0 = 0.0001 \cdot 10^0$$

quindi $fl(b - c) = 0.001 \cdot 10^{-1}$ che sommato ad a darà

$$0.001 \cdot 10^{-1} + 0.2345 \cdot 10^{-1} = 0.2355 \cdot 10^{-1}.$$

Per quando riguarda la valutazione dell'errore relativo consideriamo il valore esatto $x = 0.02347$ e quindi

$$\rho_{q_1} = \frac{|0.02347 \cdot 10^0 - 0.0236 \cdot 10^0|}{|0.02347 \cdot 10^0|} = 0.00554,$$

$$\rho_{q_2} = \frac{|0.2347 \cdot 10^{-1} - 0.2355 \cdot 10^{-1}|}{|0.2347 \cdot 10^{-1}|} = 0.0034.$$

3. Dati

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dimostrare che sono ortogonali. Dire se $A = [\mathbf{v_1 v_2 v_3}]$ è non singolare, calcolare il suo spettro e il raggio spettrale. Sfuttando i calcoli fatti e motivando la risposta calcolare determinante e spettro dell'aggiunta e dell'inversa di A.

Soluzione.

La matrice A è non singolare essendo

$$\det(A) = 13.$$

Calcolando gli autovalori di A come radici del polinomio caratteristico, troviamo che lo spettro di A è dato da

$$\sigma(A) = \{1, 3+2i, 3-2i\}$$

e di conseguenza il raggio spettrale sarà $\rho(A) = \sqrt{13}$. Sfruttando le proprietà del determinante e dello spettro si trova

$$\det(A^*) = 13, \quad \sigma(A^*) = \sigma(A) = \{1, 3+2i, 3-2i\}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{13}, \quad \sigma(A^{-1}) = \left\{1, \frac{1}{3+2i}, \frac{1}{3-2i}\right\}$$

ricordando che

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

4. Dire se la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta} \end{bmatrix}$$

è ortogonale e calcolare il suo raggio spettrale. Calcolare il numero di condizionamento in norma 1,2, ∞ di V in funzione del parametro reale positivo β.

<u>**Soluzione.**</u>

Essendo

$$V^T V = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

V non è una matrice ortogonale. Poichè V è triangolare i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale e quindi il raggio spettrale sarà

$$\rho(V) = \begin{cases} \sqrt{\beta} & \text{se} \quad \beta > 4 \\ 2 & \text{se} \quad \beta < 4 \end{cases}$$

Cominciamo col calcolo di $k_2(V) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(V^TV)}{\lambda_{min}(V^TV)}}$; lo spettro di V^TV è $\sigma(V^TV) = \left\{\beta, \frac{9+\sqrt{17}}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right\}$ da cui otteniamo

$$\lambda_{max}(V^TV) = \begin{cases} \frac{9+\sqrt{17}}{2} & \text{se} \quad \beta < \frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ \beta & \text{se} \quad \beta > \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_{min}(V^TV) = \begin{cases} \beta & \text{se} \quad \beta < \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ \frac{9-\sqrt{17}}{2} & \text{se} \quad \beta > \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

e quindi

$$k_2(V) = \begin{cases} \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2\beta}} & \text{se} \quad \beta < \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{9-\sqrt{17}}} & \text{se} \quad \frac{9-\sqrt{17}}{2} < \beta < \frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ \sqrt{\frac{2\beta}{9-\sqrt{17}}} & \text{se} \quad \beta > \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Per quanto riguarda il calcolo dei numeri di condizionamento in norma 1 e ∞ si ha innanzitutto

$$\|V\|_1 = \max\{2, 3, \sqrt{\beta}\} = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad \beta < 9 \\ \sqrt{\beta} & \text{se} \quad \beta > 9 \end{cases}$$

$$\|V\|_\infty = \max\{3, 1, \sqrt{\beta}\} = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad \beta < 9 \\ \sqrt{\beta} & \text{se} \quad \beta > 9 \end{cases}$$

Per calcolare le norme 1 e ∞ di V^{-1} calcoliamo l'inversa di V risolvendo i sistemi

$$V\mathbf{x_i} = \mathbf{e_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

senza applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss essendo V già in forma triangolare superiore.

Effettuiamo il calcolo per la prima colonna di V^{-1}:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 = 0 \\ \sqrt{\beta}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e svolgendo i calcoli in maniera analoga per la seconda e terza colonna troviamo

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\beta} \end{bmatrix}.$$

Pertanto si ottiene

$$\|V^{-1}\|_1 = \max\{1/2, 3/4, 1/\sqrt{\beta}\} = \begin{cases} 3/4 & \text{se} \quad \beta > 16/9 \\ 1/\sqrt{\beta} & \text{se} \quad \beta < 16/9 \end{cases}$$

e le stesse condizioni si ricavano per $\|V^{-1}\|_\infty$ da cui segue che

$$k_1(V) = k_\infty(V) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{\beta}} & \text{se} \quad \beta < 16/9 \\ \frac{9}{4} & \text{se} \quad 16/9 < \beta < 9 \\ \frac{3}{4}\sqrt{\beta} & \text{se} \quad \beta > 9 \end{cases}$$

5. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

utilizzarla per calcolare il determinante di A, la quarta colonna dell'inversa di A e per trovare la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (7, 7, 3, -5)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{\det(U)}{\det(P)} = -\left(-12 \cdot \frac{5}{3}\right) = 20$$

$$\mathbf{x} = [1, 2, 3, 4]^T, \quad \mathbf{x}^{(\mathbf{4})} = [-3/10, 1/10, -1/5, 2/5]^T$$