ESERCITAZIONE (15/12/2017)

1. Assegnati
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
dire per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile e per quali il metodo di Gauss Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $a = \frac{1}{2}$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Gauss Seidel e del metodo di Jacobi con vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 2)^T$.

   <u>Soluzione.</u>

   A è invertibile per $a \neq 0, \pm 1$. Il metodo di Gauss-Seidel è convergente quando $\rho(B_{G-S}) < 1$ dove $B_{G-S} = (D - E)^{-1}F$ con
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Effettuando i calcoli si trova che il metodo è convergente per $-1 < a < 1$.

   Fissato $a = \frac{1}{2}$ le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono
$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(-\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{4}\right)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(-\frac{27}{8}, 0, \frac{27}{16}\right)^T.$$
   mentre quelle del metodo di Jacobi sono
$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{3}{4}, 2, -3\right)^T.$$

2. Dati
$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
dire per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette una sola soluzione, per quali valori A è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema è convergente. Si calcolino le prima due iterazioni del metodo a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

   <u>Soluzione.</u>

Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette una sola soluzione per i valori di γ per cui A è imvertibile ossia per $\gamma \neq 0, \pm 1$. A è definita positiva per $\gamma > 1$. Per quanto riguarda il metodo di Jacobi, la matrice di iterazione data da

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha raggio spettrale ¡1 per $\gamma < -1$ e $\gamma > 1$ quindi questi sono i valori del parametro per cui il metodo di Jacobi converge.

Posto $\gamma = 2$ le prime due iterate del metodo di Jacobi sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1\right)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x - 2\sin(x) = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.

Soluzione.

Tramite il metodo grafico si trova che la radice α appartiene all'ntervallo $[1, 2]$. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{3}{2}, \quad c_1 = \frac{7}{4}, \quad c_2 = \frac{15}{8}.$$

4. Determinare un intervallo che contiene lo zero dell'equazione

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

e calcolare le prime due iterazioni del metodo di Newton usando il punto iniziale $x_0 = 2$. Dire se la convergenza è del primo o del secondo ordine.

Soluzione.

Procedendo con la ricerca dell'intervallo contenente la radice dell'equazione data col metodo grafico, si trova che $\alpha \in [1, 2]$. Le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire da $x_0 = 2$ sono:

$$x_1 = \frac{9}{5}, \quad x_2 \simeq 1.76.$$

Essendo $f'(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ la radice è semplice (infatti $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \notin [1, 2]$), quindi l'ordine di convergena del metodo di Newton è $p = 2$.

5. Esprimere nella forma di Lagrange e in forma canonica il polinomio che interpola la tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	-1	0	7

<u>Soluzione.</u> Il polinomio interpolante, di grado 3, nella forma di Lagrange sarà dato da

$$p_3(x) = -2L_0(x) - L_1(x) + 7L_3(x)$$

dove

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x+1)$$

sono i polinomi caratteristici di Lagrange.

Sostituendo e svolgendo i calcoli si trova che il polinomio interpolante è

$$p_3(x) = x^3 - 1.$$

Per quanto riguarda il calcolo del polinomio interpolante tramite la base canonica, si cerca un polinomio della forma

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

tale che $p_3(x_i) = y_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$. Quini per trovare i coefficienti a_j della combinazione lineare occorre risolvere il seguente sistema lineare con matrice dei coefficienti la matrice di Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Tramite l'algoritmo di Gauss con pivoting si trova il sistema triangolare

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -2 \\ 3a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 9 \\ -2a_2 - 4a_3 = -4 \\ 2a_3 = 2 \end{cases}$$

con soluzione $\mathbf{a} = (-1, 0, 0, 1)^T$.

Si osservi che il polinomio interpolante in forma canonica coincide con quello scritto tramite i polinomi caratteristici di Lagrange dato che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$.