Facoltà di Scienze MFN, Università di Cagliari
Analisi Matematica 1 (Informatica), a.a. 2007/08

Esercizi: Parte 1

Insiemi numerici: $\sup A$, $\inf A$

1. Verificare se A, nel caso sia non vuoto, è limitato superiormente, inferiormente, e trovare $\sup A$, $\inf A$, e $\max A$, $\min A$ (se esistono), dove

$$\begin{aligned}
A &= \text{l'insieme formato dai numeri } -5,\ 7/3,\ 2,\ -11/2 && (1)\\
A &= \{\frac{2n+3}{n} : n = 1, 2, \ldots\} && (2)\\
A &= \{x : x^2 - 6x - 7 \le 0\} && (3)\\
A &= \{x : x^2 - 6x - 7 < 0\} && (4)\\
A &= \{x : |4x-3| < 5\} && (5)\\
A &= \{x : |4x-3| > 103\} && (6)\\
A &= \{3 + \frac{(-1)^n}{n} - 2^{(-1)^n n} : n = 1, 2, \ldots\} && (7)
\end{aligned}$$

Cenni su alcune soluzioni: (1) è un insieme finito, quindi $\exists max$ e $\exists \min$, nel nostro caso si ha $\max A = 7/3$, $\min A = -11/2$; per (3) (rispettivamente, (4)) si ha, dopo la risoluzione della disequazione quadrattica, $A =]-7, -1[$ (rispettivamente, $A = [-7, -1]$, quindi negli ambedue casi si ha $\sup A = -1$, $\inf A = -7$, (4) esistono max e min: per A definito da (6) si ha $A =]-\infty, -53/2[\bigcup]25, +\infty[$, quindi A non è limitato ne superiormente ne inferiormente, cioè, in breve $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.

2. Studiare per estremi superiori, inferiori e massimi, minimi (se esistono)

$$A = \Omega \bigcup \Theta, \qquad B = \Omega \bigcap \Theta$$

dove

a) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 < 0\}$, $\Theta = \{x : |2x-3| < 5\}$;
b) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 \le 0\}$, $\Theta = \{x : |2x-3| < 5\}$;
c) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 < 0\}$, $\Theta = \{x : |2x-3| \le 5\}$;
d) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 \le 0\}$, $\Theta = \{x : |2x-3| \le 5\}$;

Cenni su alcune soluzioni. Per a) si ha $\Omega =]-3, -1[$ $\Theta =]-1, 4[$, quindi $A =]-3, 4[\setminus \{-1\}$ (l-intervallo $]-3, 4[$ senza -1 e $\sup A = 4$, $\inf A = -3$, non esistono $\max A$ e $\min A$, mentre $B = \emptyset$. Per d) si ha $\Omega = [-3, -1]$ $\Theta = [-1, 4]$, quindi $A = [-3, 4]$ e $\sup A = \max A = 4$, $\inf A = \min A = -3$, mentre $B = \{-1\}$, quindi $\sup B = \max B = \inf B = \min B = -1$

Induzione: un esempio

1. Dimostrare, mediante il metodo dell'induzione, che $3^n \ge (n+1)^2$ per $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Che cosa capita per $n = 1$?

Cenni su possibili soluzioni: Per $n = 2$ vale (con $=$). Supponiamo che sia vera per $n = k$, cioè $3^k \ge (k+1)^2$. Dobbiamo dimostrare che:

$$3^{k+1} \ge (k+2)^2.$$

Si ha, usando l'ipotesi induttiva:

$$3^{k+1} \ge 3\, 3^k \ge 3(k+1)^2$$

Quindi basta osservare che $3(k+1)^2 \geq (k+2)^2$ per $k \in \mathbb{N}$. Si può arrivare alla stessa conclusione mediante

$$(k+2)^2 = (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 \leq 3^k + 2(k+1)^2 \leq 3^k + 2\,3^k = 3^{k+1}$$

usando $2(k+1)+1 \leq (k+1)^2$.

Binomio di Newton

Ricordiamo che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k$$

dove

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Trovare i coefficienti in fronte di
 a) x, x^2 in $(1-3x)^{206}$:
 b) x, x^2 in $(2-3x)^6$;
 c) ξ^{11} in $(3+\xi)^{13}$;
 d) t^2 in $(1-3t)^5$.

Cenni sulle soluzioni. a) Si ha

$$(1-3x)^{206} = \sum_{k=0}^{206} \left(\begin{array}{c} 206 \\ k \end{array} \right) (-3x)^k$$

quindi il coefficient in fronte di x è

$$\left(\begin{array}{c} 206 \\ 1 \end{array} \right) (-3) = -3 \frac{206!}{1!205!} = -3 \times 206 = -718,$$

in fronte di x^2 è

$$\left(\begin{array}{c} 206 \\ 3 \end{array} \right) (-3)^2 = 9 \frac{206!}{2!204!} = 9 \times 205 \times 103$$

$= 190035$, ma va bene anche nella forma del prodotto.

Successioni

1. Studiare se esiste il limite mediante le definizione del limite (anche per successioni divergenti verso infinito) della successione a_n, dove:
a) $a_n = \dfrac{3}{n}$; b) $a_n = \dfrac{5n+3}{2n+1}$; c) $a_n = -n^3$;
Cenni sulle soluzioni. b) Si ha

$$a_n = \frac{5+3/n}{2+1/n} \; \overrightarrow{n \to \infty} \; \frac{5}{3}.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Allora, poichè

$$|a_n - \frac{5}{2}| = |\frac{5+3/n}{2+1/n} - \frac{5}{2}| = \frac{1/n}{4+2/n}| \leq \frac{1}{4n} < \varepsilon$$

basta scegliere l'indice $\nu > \frac{1}{4\varepsilon}$.
2. Per la successione a_n, $n \in \mathbb{N}$:

 i) Trovare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
 ii)* Studiare se la successione è monotòna e ponendo $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, trovare $\sup A$, $\inf A$ e $\min A$, $\max A$ (se esistono),
 dove

a) $a_n = \dfrac{4^{n+1} + 12n - 5}{4^n + 3n}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = \dfrac{9^{n+1} - 18n + 2}{9^n - 2n}$, $n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n+1} - 2}$, $n \in \mathbb{N}$

3. Sia $a_n = \sin(\dfrac{3^n - 1}{3^{n+1} - 2}\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ una successione.

   a) Trovare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   b) Studiare se la successione $b_n := \dfrac{3^n - 1}{3^{n+1} - 2}$ è monotona.

   c) Dopo aver risolto b), ponendo $S := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ trovare $\sup S$, $\inf S$ e $\min S$, $\max S$ (se esistono).

Cenni su possibili soluzioni. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^{n+1} - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3\,3^n - 2} = \frac{1}{3}$$

e quindi, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Per la monotoni, si osserva che

$$\frac{3^n - 1}{3^{n+1} - 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3^{n+1} - 2)}$$

quindi, a_n è strettamente crescente e $\inf S = \min S = \sin(2\pi/7)$, mentre $\sup S = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\nexists \max S$.

Limiti, funzioni continue

1. Trovare i limiti:

   a) $\lim\limits_{z\to-\infty} (\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z - 3)$;

   b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{\sin(\pi x)}$; [1]

   c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{e^{x+1} - 4^{x+1}}{\ln(5 + 2x) + x^2 + x}$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4 - 5x^2 + 5} - x^2)$;

   e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 - 7x} + x^2 - 4}{e^{x+1} - 2 + \cos(x + 1)}$

   f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left\{\log_2(2x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 + 1)\right\}$.

   g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin(2x)} - 1}{\mathrm{tg}\,((5x)}$.

   h)* $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{x}{x^2 - x + 2006})^{\mathrm{cotg}\,\frac{1}{3x}}$

   i)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \; 5x \ln \sqrt{x^2 + 2x} - x)$

Cenni su possibili soluzioni:

a) Osserviamo che dalla somma dei limiti basta studiare $\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z$. Si razzionalizza,

$$\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z = \frac{(\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z)(\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z}{\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z} = \frac{-4z + 2}{\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z}$$

[1] **Suggerimento**: Potete usare la periodicità del seno, che implica $\sin(\pi\theta) = \sin(\pi\theta + 2k\pi) = \sin(\pi(\theta + 2k))$ per $k \in \mathbb{N}$.

e alla fine, tenendo conto che $z = -\sqrt{z^2}$ se $z < 0$, si ottiene

$$= \frac{-4}{-\sqrt{1 - 4/z + 11/z^2} - 1} \to 2$$

per $x \to -\infty$. Quindi il limite originale $= 2 - 3 = -1$.

Si può razzionalizza anche direttamente, con calcoli un pò più lunghi:,

$$\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z - 3 = \frac{(\sqrt{z^2 - 4z + 11} + z - 3)(\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z + 3}{\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z + 3} = \frac{2z + 2}{\sqrt{z^2 - 4z + 11} - z + 3}$$

e alla fine, tenendo conto che $z = -\sqrt{z^2}$ se $z < 0$, si ottiene di nuovo limite $= -1$;

b) si osserva che $\sin \pi x = \sin(\pi(x - 2))$ e poi si dividono il numeratore e il denominatore con $x - 2$. Si conclude usando limiti notevoli (quali?). Si può anche cambiare $t = x - 2$ e si passa al limite per $t \to 0$.

c) immediato! $= 0/\ln 3 = 0$. Si fa riferimento a operazioni con i limiti (quale regola?).

f) si ha

$$(1 + \frac{x}{x^2 - x + 2006})^{\operatorname{cotg} \frac{1}{3x}}$$

$$\left[(1 + \frac{x}{x^2 - x + 2006})^{\frac{x^2 - x + 2006}{x}}\right]^{\frac{x}{x^2 - x + 2006} \operatorname{cotg} \frac{1}{3x}}$$

$$\sim e^{\frac{x}{\sin \frac{1}{3x}(x^2 - x + 2006)}}$$

e poichè

$$\frac{x}{\sin \frac{1}{3x}(x^2 - x + 2006)} \sim \frac{3x^2}{x^2 - x + 2006}$$

per $x \to \infty$, otteniamo come per il limite e^3.

i) si ha

$$5x \ln \sqrt{x^2 + 2x} - x) = 5x \ln(1 - (\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1))$$

$$5x \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x - 1}) \sim -\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x - 1}) \; x \overset{\to}{\to} +\infty = \frac{5}{2}$$

4. Studiare per quali valori dei parametri la funzioni f è continua, dove

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{se} \quad x > 2 \\ 3x - 1 & \text{se} \quad x \le 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \mu \sin(\frac{\pi}{18} x) & \text{se} \quad x \in [3, +\infty[\\ \mu x + \nu & \text{se} \quad x \in]-1, 3] \\ (\nu \cos(\pi x) - \mu & \text{se} \quad x \in]-\infty, -1] \end{cases}$

c)

Sia $f(x) = f_{\lambda,\mu}(x) = \dfrac{\ln(2 - \cos(2x))}{2x^\lambda}$ per $x > 0$, e $f(x) = \mu \cos(2x)$ per $x \le 0$ dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5*. Sia $f(x) = f_{\lambda,\mu}(x) = \dfrac{\ln(2 - \cos(2x))}{2x^\lambda}$ per $x > 0$, e $f(x) = \mu \cos(2x)$ per $x \le 0$ dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Trovare tutte le $\lambda \in \mathbb{R}$ per quali il limite destro $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ rappresenta una forma indeterminata. Inoltre, studiare $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. [2]

b) Trovare il limite sinistro $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

c)* Trovare tutte le coppie (λ, μ) tali che $f \in C(\mathbb{R})$.

Cenni su possibili soluzioni:

Si ha, per $x > 0$:

[2] **Suggerimento**: Potete usare l'identità $2 - \cos(2t) = 1 + 2 \sin^2 t$ e limiti notevoli.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{2x^\lambda} = \frac{\ln(2-\cos(2x))}{2\sin^2 x}\frac{\sin^2 x}{x^\lambda} \\
&= \frac{\ln(2-\cos(2x))}{2\sin^2 x} * \frac{\sin x}{x})^2 x^{2-\lambda}
\end{aligned}
$$

Dai limiti notevoli (quali?) ne segue che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{per} \quad \lambda > 2 \\ 1 & \text{per} \quad \lambda = 2 \\ 0 & \text{per} \quad \lambda < 2 \end{cases}$

D'altra parte, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \mu$. e quindi, $f \in C(\mathbb{R})$ se e solo $\mu = 0, \lambda < 2$ oppure $\mu = 1, \lambda = 2$.

Calcolo Differenziale

1. Data la funzione $f(x)$, i) Trovare la derivata prima $f'(x)$ e la derivata second $f''(x)$. [3]; ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$; c)* Applicare il teorema di Lagrange per f nell'intervallo $[a, b]$. [4], dove

a) $f(x) = x^{-x^2}$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $a = 1/2$. [5];
b) $f(x) = x^{\cos x}$, $x > 0$, $x_0 = \pi$, $a = \pi/2$, $b = 2\pi$.

Cenni su possibili soluzioni: a) Si ha $f(x) = x^{-x^2} = e^{-x^2 \ln x}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x^2 \ln x}(-2x\ln x - x) \\
f''(x) &= e^{-x^2 \ln x}(4x^2(1+\ln x)^2 - 2\ln x - 3)
\end{aligned}
$$

e quindi $f'(1) = -1$, $f''(-1) = -3$.

Poichè $f(1) = 1$, l'equazione della retta tangente al Γ_f (il grafico di f) nel punto $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Quindi, nel nostro caso, poichè $f(1) = 1$, si ha: $y = 1 - (x-1) = -x+2$. Osservazione: Si può scrivere anche il polinomio di Taylor, si ha $T_2(x) = 1 - (x-1) - 3(x-1)^2/2$.

2. Studiare il grafico della funzione f seguendo un piano del tipo: determinare il dominio di definizione, eventuali asintoti verticali; trovare $f'(x)$, massimi e minimi, studiare gli intervalli di monotonia. [6]; trovare $f''(x)$ e studiare per la convessità, concavità, punti di flesso. Alla fine, disegnare il grafico (in modo schematico, indicando i punti "notevoli"), dove

a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$;
b) $x^3 + 12x + 1$;
c) $f(x) = x3^x$;
d) $f(x) = x3^{-x}$;
e) $x\ln x$;
f) $f(x) = -x^2 e^x$;
g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$;
h) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$;
i) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 11}{x-1}$;
j)* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$;
k) * $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Cenni su possibili soluzioni: i) Si osserva che $f(x)$ può essere scritta come $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{8}{x-1}$. Dominio di definizione, $x \neq 1$, non è ne pari, ne dispari.

[3]**Suggerimento**: Potete usare l'identità $a^b = e^{b\ln a}$.
[4]**Osservazione**: Si ricorda che $a^0 = 1$ per $a > 0$.
[5]**Osservazione**: Si ricorda che $a^0 = 1$ per $a > 0$.
[6]Si può disegnare una prima approssiamzione del grafico di f.

Asintoto verticale: $x = 1$, $\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

Asintoto obliquo: $y = 2x - 3$. Poi, $f(x) - (2x - 3) = \frac{8}{x-1}$, quindi $f(x) > 2x - 1$ per $x > 1$ mentre $f(x) < 2x - 3$ per $x < 1$.

La derivata prima può essere espressa

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - 8}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 6}{x-1}$$

e $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 3$, $f'(x) > 0$ per $x \in]-\infty, -1[\bigcup]3, +\infty[$, $f'(x) < 0$ per $x \in]-1, 1[\bigcup]1, 3[$. Quindi, $f \searrow$ negli intervalli $]-1, 1[$ e $]1, 3[$ mentre $f \searrow$ negli intervalli $]-\infty, -1[$ e $]3, +\infty[$. Massimo locale (forte) di f in $x = -1$, $f(-1) = -9$, mentre per $x = 3$ la funzione ammette massimo locale (forte), $f(3) = 7$.

La derivata seconda: $f''(x) = \frac{-8}{(x-1)^3}$, quindi $f''(x) > 0$ (e f è strettamente convessa) per $x < 1$, $f''(x) < 0$ (e f è strettamente concava) per $x > 1$.

Intersezioni con l'asse Ox: non ci sono, $f(x) = 0$ non ha soluzioni.