Facoltà di Scienze MFN, Università di Cagliari
Analisi Matematica 1 (Informatica), a.a. 2006/07

Notazioni, richiami sulla teoria degli insiemi.

Introduzione e richiami di alcune notazioni (simboli) matematiche.

$P \Rightarrow Q$ - l'affermazione P implica Q o la Q ne segue dalla P.
$P \Leftarrow Q$ - l'affermazione Q implica P o la P ne segue dalla Q.
$P \Leftrightarrow Q$ - l'affermazione P è equivalente alla Q o la P è vera se e solo se è vera la Q.
$\exists$ - esiste
! - unico/a
$\exists!$ - esiste e unico/a

Cenni sulla teoria degli insiemi.

$x \in S$: x appartiene a S o x è un elemento di S.
$y \notin S$: y non appartiene a S o y non è un elemento di S.
Se A e B sono due insiemi, sono definite le operazioni:
a) $A \subset B$ significa A è un sottoinsieme di B (cioè $x \in A \Rightarrow x \in B$).
b) $\bigcup$ - unione, $A \bigcup B = \{x : x \in A \ o \ x \in B\}$
c) $\bigcap$ - intersezione, $A \bigcap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}$
e) il complemento $A \backslash B$ (oppure $A - B$) è definito come $\{x : x \in A \ e \ x \notin B\}$
d) l'insieme complementare: $A^c = \bar{A} = \{x : x \notin A\}$ (si sottointende che $\exists$ una classe (insieme) E per cui $x \in E$)
Alcune proprietà (le formule di Bool):

$$\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B} \tag{1}$$

$$\overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B} \tag{2}$$

l'illustrazione geometrica fornisce una spiegazione (e dimostrazione) immediata.
Il prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \ , \ x \in B\}$ (tutte le coppie ordinate):
$\mathbb{N}$ - l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, \dots, \}$
$\mathbb{Z}$ - l'insieme dei numeri interi $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \}$
$\mathbb{Q}$ - l'insieme dei numeri interi $\{r = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ n \neq 0\}$
$\mathbb{R}$ - l'insieme dei numeri reali.

Cenni sulla teoria assiomatica dei numeri reali.

Che cosa si intende per l'insieme dei numeri reali ? Un insieme X non vuoto, con almeno due elementi, dotato di due operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$ che soddisfa:
1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietá associativa).
2) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (proprietá commutativa).
3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietá distributiva)
4) $\exists$ due elementi distinti 0 e 1 di X tali che $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$ (elementi neutri).
5) $\forall a$, $\exists - a$ t.c. $a + (-a) = 0$ (elementi opposti).
6) $\forall a \neq 0$, $\exists a^{-1}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = 0$ (elementi inversi).

Assiomi relativi all'ordinamento totale $\leq$ (la relazione minore o uguale per ogni coppia).

7) $\forall a, b \in X$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (dicotomia).

8) $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow b = a$ (antisimmetria).
9) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, $\forall c$.
10) $0 \leq a$, $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$.

Alla fine l'assioma "caratterizzante" dei numeri reali (l'assioma di completezza). Ma prima alcuni concetti:

Sia $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Un elemento η si chiama maggiorante per A se vale $a \leq \eta$, $\forall a \in A$.
Analogamente per un minorante ($\eta \leq a$).
A è detto limitato superiormente (rispettivamente, inferiormente) se ammette almeno un maggiorante (rispettivamente, un minorante).
L'estremo superiore $M = \sup A$ (rispettivamente, $m = \inf A$), se esiste, è definito come il più piccolo (rispettivamente, il più piccolo grande) dei maggioranti (rispettivamente, minoranti).
L'elemento più grande (massimale) $\max A$ è definito come $\eta \in A$, $a \leq \eta$, $\forall a \in A$. Analogamente $\min A$.
Evidentemente $\max A = \sup A$. Se esite $\sup A$ esiste anche $\max A$?

L'assioma di continuità ha la forma seguente:

11) Se $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ soddisfano $a \leq b$ $\forall a \in B$, $b \in B$ allora esiste almeno un numero (elemento) τ separatore t.c. $a \leq \tau \leq b$, $\forall a \in B$, $b \in B$.

Vale il seguente:

Theorem 0.1 *Ogni insieme A limitato superiormente ammette* $\sup A$.

Remark 0.2 *Per i numeri razionali $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di continuità.*

Come conseguenza si possono definire le funzioni elementari a^x se $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (per esempio $2^{\sqrt{3}}$, ecc.)

Ricordiamo alcune notazioni per gli intervalli. Siano $a < b$ due numeri reale.
Intervalli aperti $]a, b[$ oppure (a, b) (l'insieme di tutti gli x t.c. $a < x < b$).
Intervalli chiusi $[a, b]$ (l'insieme di tutti gli x t.c. $a \leq x \leq b$).
Intervalli semiaperti a destra (semichiusi a sinistra) $[a, b[$ oppure $[a, b)$ (l'insieme di tutti gli x t.c. $a \leq x < b$).
Intervalli semiaperti a sinistra (semichiusi a destra) $]a, b]$ oppure $(a, b]$ (l'insieme di tutti gli x t.c. $a < x \leq b$).
Si permette $a = -\infty$ (rispettivamente, $b = +\infty$) nel caso di parentesi aperta a sinistra (rispettivamente, a destra), per esempio $]-\infty, b[$ è l'insieme di tutti gli x tali che $x < b$.

Esericizi: Verificare se A, nel caso sia non vuoto, è limitato superiormente, inferiormente, e trovare $\sup A$, $\inf A$, e $\max A$, $\min A$ (se esistono), dove

$$A = \text{l'insieme formato dai numeri } -5,\ 7/3,\ 2,\ -11/2 \tag{3}$$
$$A = \{\frac{2n+3}{n} : n = 1, 2, \ldots\} \tag{4}$$
$$A = \{x : x^2 - 6x - 7 \leq 0\} \tag{5}$$
$$A = \{x : x^2 - 6x - 7 < 0\} \tag{6}$$
$$A = \{x : |4x - 3| < 5\} \tag{7}$$
$$A = \{x : |4x - 3| > 103\} \tag{8}$$
$$A = \{3 + \frac{(-1)^n}{n} - 2^{(-1)^n n} : n = 1, 2, \ldots\} \tag{9}$$

Cenni su alcune soluzioni: (3) è un insieme finito, quindi $\exists \max$ e $\exists \min$, nel nostro caso si ha $\max A = 7/3$, $\min A = -11/2$; per (5) (rispettivamente, (6)) si ha, dopo la risoluzione della disequazione quadrattica, $A =]-7, -1[$m (rispettivamente, $A = [-7, -1]$, quindi negli ambedue casi si ha $\sup A = -1$, $\inf A = -7$, (6) esistono max e min: per A definito da (8) si ha $A =]-\infty, -53/2[\bigcup]25, +\infty[$, quindi A non è limitato ne superiormente ne inferiormente, cioè, in breve $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.

2. Studiare per estremi superiori, inferiori e massimi, minimi (se esistono)

$$A = \Omega \bigcup \Theta, \qquad B = \Omega \bigcap \Theta$$

dove

a) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 < 0\}$, $\Theta = \{x : |2x - 3| < 5\}$;
b) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 \leq 0\}$, $\Theta = \{x : |2x - 3| < 5\}$;
c) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 < 0\}$, $\Theta = \{x : |2x - 3| \leq 5\}$;
d) $\Omega = \{x : x^2 + 4x + 3 \leq 0\}$, $\Theta = \{x : |2x - 3| \leq 5\}$;

Cenni su alcune soluzioni. Per a) si ha $\Omega =]-3, -1[$ $\Theta =]-1, 4[$, quindi $A =]-3, 4[\setminus\{-1\}$ (l-intervallo $]-3, 4[$ senza -1 e $\sup A = 4$, $\inf A = -3$, non esistono $\max A$ e $\min A$, mentre $B = \emptyset$. Per d) si ha $\Omega = [-3, -1]$ $\Theta = [-1, 4]$, quindi $A = [-3, 4]$ e $\sup A = \max A = 4$, $\inf A = \min A = -3$, mentre $B = \{-1\}$, quindi $\sup B = \max B = \inf B = \min B = -1$

Funzioni: generalità.

Per maggiori dettagli cf. il testo consigliato (P. Marcellini e C. Sbordone, Elementi di Analisi 1: versione semplificata per i nuovi corsi di laurea).

Funzioni reali a valori reali

$$f : A \longrightarrow B \tag{10}$$

dove $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. A si chiama il dominio o insieme di definizione, B il codominio (di f). L'immagine $f(A) \subset B$ è l'insieme

$$f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\} \tag{11}$$

- f è detta iniettiva $\Leftrightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ per $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$;
- f è detta suriettiva $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$, cioè $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tale che $f(x) = y$;
- f è detta biettiva (biunivoca) $\Leftrightarrow$ f è iniettiva e suriettiva;

Un problema che appare nello studio di funzioni è il seguente: trovare l'insieme di definizione di $f(x)$ definita da espressioni elementari. Per esempio $f(x) = \sqrt{2x - 5}$ è definita per $x \geq 5/2$ (perchè ?).

Il grafico di $f(x)$ è definito come l'insieme nel piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \tag{12}$$

Funzioni monotone. Sia f una funzione definita in un intervallo I. Allora

- f è strettamente crescente (in I) se $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.
- f è crescente (in I) se $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f è strettamente decrescente (in I) se $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.
- f è decrescente (in I) se $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funzione pari (rispettivamente, dispari): se $f(-x) = f(x)$ (rispettivamente, $f(-x) = -f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni periodiche, di periodo $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$, $x \in R$. Funzioni monotone, limitate.

Funzioni inverse. Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è invertibile $\Leftrightarrow$ è iniettiva e suriettiva (cioè biettiva). La sua inversa f^{-1} è definita da $f^{-1}(y) = x$, quindi, posto $g := f^{-1}$ si ha $g \circ f(x) := g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$, e $f \circ g(y) := f(g(y)) = y$, $\forall y \in B$.

Funzioni composte $g \circ f(x) := g(f(x))$ se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. La funzione $h : g \circ f : A \longrightarrow C$

Funzioni elementari e le loro inverse.

La funzione lineare $f(x) = mx + n$, $m \neq 0$. La sua inversa: $x = f^{-1}(y) = (y - n)/m$ (si risolve $f(x) = y$).

La funzione potenza $f(x) = x^n$, $x > 0$, dove $n \in \mathbb{R}$. Se $n \in \mathbb{N}$ oppure $n = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ primi tra loro, q dispari, l'insieme di definizione coincide con $\mathbb{R}$. La sua inversa è di nuovo del tipo potenza, $x = y^{1/n}$, $y > 0$.

La funzione esponenziale: fissato $a > 0$, $a \neq 1$, si ha

$$y = f(x) = a^x \tag{13}$$

Tale funzione è strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) se $a > 1$ (rispettivamente $0 < a < 1$). Proprietà:

- $a^{x+y} = a^x a^y, \quad x, y \in \mathbb{R}$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = (a^x)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$; **N.B. Un errore grave del tipo $(a^x)^y = a^{x^y}$ è sbagliato!!!**

La funzione inversa di a^x è la funzione logaritmo

$$x = log_a y \qquad y > 0 \tag{14}$$

Tale funzione è strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) se $a > 1$ (rispettivamente, $0 < a < 1$). Proprietà:

- $a^{log_a x} = x, \quad x > 0$ (la funzione inversa di a^x);
- $log_a(xy) = log_a x + log_a y, \quad x > 0,\ y > 0$;
- $log_a(x^y) = y log_a x, \quad x > 0,\ y > 0$;
- $log_a 1 = 0$.

Funzioni trigonometriche $\cos x,\ \sin x,\ \mathrm{tg}\, x,\ \mathrm{cotg}\, x$ e le loro inverse $\arccos x,\ \arcsin x,\ \mathrm{arctg}\, x,\ \mathrm{arctg}\, x$ (maggiori dettagli in seguito).

Induzione.

Il principio dell'induzione matematica: siano

$$P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots \tag{15}$$

affermazioni che soddisfano:

1) $P(1)$ è vera.

2) se $P(n)$ è vera ne segue che $P(n+1)$ è vera.

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizi:

1) $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$

2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

4) $2^n > n, \quad n \in \mathbb{N}$. Cenni sulla dimostrazione: per $n=1$ è vera. Supponiamo che sia valida per $n=k$. Allora, per $n=k+1$, si ha:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k = k + k \geq k + 1. \tag{16}$$

Un approccio alternativo

$$k + 1 \geq 2k < 2 \times 2^k = 2^{k+1}. \tag{17}$$

5) * $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Cenni sulla dimostrazione: per $n=4$ è vera. Supponiamo che sia valida per $n=k+1$, si ha:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \tag{18}$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k^2 > 2k+1$ per $k \geq 4$. Un approccio alternativo:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq k^2 + 3k \leq k^2 + k^2 = 2k^2 \leq 2 \times 2^k = 2^{k+1}. \tag{19}$$

Osserviamo che $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, quindi la diseguaguaglianza non vale per $n=3$.

6) * La diseguaglianza di Bernoulli: $(1+\xi)^n \geq 1 + n\xi$ per $\xi \geq -1$. Cenni sulla dimostrazione: per $n=1$ è vera. Supposta vera per n si ha

$$(1+\xi)^{n+1} = (1+\xi)(1+\xi)^n \geq (1+\xi)(1+n\xi) = 1 + (n+1)\xi + n\xi^2 \geq 1 + (n+1)\xi. \tag{20}$$

Domanda: Dove è stata usata la condizione $\xi \geq 1$?

Binomio di Newton

Ricordiamo che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Trovare i coefficienti in fronte di

a) x, x^2 in $(1-3x)^{206}$:
b) x, x^2 in $(2-3x)^6$;
c) ξ^{11} in $(3+\xi)^{13}$;
d) t^2 in $(1-3t)^5$.

Cenni sulle soluzioni. a) Si ha

$$(1-3x)^{206} = \sum_{k=0}^{206} \binom{206}{k} (-3x)^k$$

quindi il coefficiente in fronte di x è

$$\binom{206}{1}(-3) = -3\frac{206!}{1!205!} = -3 \times 206 = -718,$$

in fronte di x^2 è

$$\binom{206}{3}(-3)^2 = 9\frac{206!}{2!204!} = 9 \times 205 \times 103 = 190035.$$