Analisi Matematica 1, Informatica
Università di Cagliari, 2006/2007
Esercizi e domande relativi al secondo parziale

Formula di Taylor

Richiami sulla formula di Taylor: f e' n volte derivabile in $]a,b[$ e $x_0 \in]a,b[$ si ha:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

dove il resto n -esimo R_n) soddisfa

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

(il resto di Peano). Il polinomio

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

si chiama il polinomio di Taylor. Se $x_0 = 0$: la formula di McLauren.

Formule di Taylor (McLaurin) per funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Osservazione–domanda:* tenendo conto del fatto che $\sin x$ e' dispari e $\sin x \in C^\infty$, il resto e' $O(x^{2n+2})$.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

Osservazione–domanda:* tenendo conto del fatto che $\cos x$ e' dispari e $\cos x \in C^\infty$, il resto e' $O(x^{2n+1})$.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

Scrivere la fromula di Taylor e calcolare T_n per f in x_0, dove

1) $f(x) = \sin(2x+3)$, $x_0 = -3/2$, $n = 3$. Soluzione: Due approcci, il primo e' semplicemente applicare le formule, il secondo consiste nell'osservazione che posto $t = 2x + 3$ abbaimo $t_0 = 2x_0 + 3 = 0$ e si ha

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 2x + 3 - \frac{(2x+3)^3}{6} + o((2x+3)^3)$$

2) * $f(x) = \cos(3x)$, $x_0 = \pi$, $n = 2$. Cenni sulla soluzione: a parte il calcolo diretto, potete fare con meno calcoli osservando che

$$\cos(3x) = \cos(3(x-\pi) + 3\pi) = -\cos(3(x-\pi)),$$

ponendo $t = 3x - 3$ e usando che $-\cos t = -1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$

3. $f(x) = \sqrt[3]{21 - 7x}$, $x_0 = -6/7$, $n = 2$. Cenni sulla soluzione: si ha (verificare) $f(-6/7) = 3$, $f'(-6/7) = -\frac{7}{3}3^{-2}$, $f''(-6/7) = +\frac{98}{9}3^{-5}$ quindi

$$T_2(x) = 3 - \frac{7}{27}(x + \frac{6}{7}) + +\frac{49}{3^7}(x + \frac{6}{7})^2.$$

4. $f(x) = \text{arctg}\,(3x)$, $x = -1/3$, $n = 2$.
5.* $f(x) = x^{\sin(\pi x)}$, $x_0 = 1$, $n = 2$. Soluzione: Si ha

$$f'(x) = x^{\sin(\pi x)}(\frac{\sin(\pi x)}{x} + \pi\cos(\pi x)\ln x)$$

$$f''(x) = x^{\sin(\pi x)}(\frac{\sin(\pi x)}{x} + \pi\cos(\pi x)\ln x)^2$$

$$+x^{\sin(\pi x)}\left(\frac{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2} - \pi^2\sin(\pi x)\ln x + \pi\cos(\pi x)\frac{1}{x}\right),$$

quindi $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2\pi$ e $T_2(x) = 1 - \pi(x-1)^2$. Controllate!!!

Integrali indefiniti

Ricordiamo che

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C$$

se $g'(x) = f(x)$. La funzione $g(x)$ si chiama primitiva di $f(x)$.

Integrali indefiniti del tipo

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + C$$

dove $g'(y) = f(y)$ oppure usando $df(x) = f'(x)dx$ si puo' scrivere

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = ...$$

1. (Integrali quasi–immediati) Calcolare

a) $\int (\cos(3x-4) + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} - 5^{3x})\, dx$

b) $\int (\sin(2x) + \frac{4x^2+\sqrt{x}}{x} + 2^{2x})\, dx$

c) $\int \cos(2-7x) dx$

d) $\int \frac{24}{(5-3x)^5} dx$. Soluzione: Si ha

$$\int \frac{24}{(5-3x)^5} dx = -8 \int (5-3x)^{-5} d(5-3x) = 2(5-3x)^{-4} + C$$

e) $\int \frac{1}{4+x^2} dx$. Soluzione: Si ha

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+(x/2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(x/2)^2} d(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) + C$$

Integrali definiti (di Riemann)

Richiami sulla definzione dell'integrale definito (di Riemann) $\int_a^b f(t)dt$, il suo significato geometrico, i teoremi notevoli (teorema della media, teorema fondamentale del calcolo integrale).

1. Esercizi-domande del tipo teorico: ennunciare (ed eventualmente illustare geometricamente) il teorema della media , il teorema fondamentale del calcolo integrale. Oppure la formula per l'area della figura delimitata dal Γ_f e Γ_g (la notazione per il grafico di f o g) se $f(x) \leq g(x)$ per $x \in [a, b]$.

2. Esercizi del tipo calcolare $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dove $f(x)$ ...: in sostanza, si tratta (certamente, si suppone che sia una buona padronanza dei teoremi e metdoi, cf. il punto precedente). In sintesi: per calcolare l'integrale definito, basta trovare una primitiva (cioe' risolvere l'integrale indefinito) e poi calcolare l'incremento di una (qualsiasi) primitiva nell'intervallo $[a, b]$.
A titolo di esempio: esercizi di livello "integrali quasi–immediati":

$$\int_{2/7-\pi/21}^{2/7+\pi/14} \sin(2-7x)\, dx = [\frac{1}{7}\cos(2-7x)]_{2/7-\pi/21}^{2/7+\pi/14} = \frac{1}{7}\cos(-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{7}\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{14}$$

Controllate!!!

Altri essercizi su integrali definiti appaiono piu' avanti.

3. Esercizi del tipo: trovare l'area della regione Ω delimitata da
i) il grafico di $f(x) = e^{-3x}$ e l'intervallo $[-\ln(\sqrt[3]{7}), 0]$.
Soluzione: si trova (osserviamo che $-\ln(\sqrt[3]{7}) = -\frac{1}{3}\ln 7$)

$$\Omega = \{(x,y) :\ 0 \le y \le e^{-3x}, 0 \le x \le -\frac{1}{3}\ln 7]\}$$

quindi, l'area

$$= \int_{-\ln(\sqrt[3]{7})}^{0} e^{-3x}dx = [-\frac{e^{-3x}}{3}]_{-\ln(\sqrt[3]{5})}^{0} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\ln 7} = 2.$$

Controllate !!!
ii)* $y = -(x+2)^2$ e $y = 2x+4$. Soluzione: si trova

$$\Omega = \{(x,y) :\ 2(x+2) \le y \le -(x+2)^2,\ -4 \le x \le -2\}$$

quindi, l'area

$$= \int_{-4}^{-2} (-(x+2)^2 - 2(x+2))dx = [-\frac{(x+2)^3}{3} - (x+2)^2]_{-4}^{-2} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Controllate!!!

Esercizi su integrali (indefiniti, definiti) mediante diversi metodi

Calcolare gli integrali

1)* $\int_{-6}^{0} \frac{x+3}{x^2+6x-7}dx$: Soluzione: Poiche' $x^2+6x-7 = (x-1)(x+7)$ la funzione e' continua in $[-6, 0]$ (N.B. considerazione importante, per poter procedere con il calcolo dell'integrale di Riemann, altrimenti non ha senso di parlatre di integrale $\int_a^b$ se, per esempio, f non e' limitata in $[a,b]$). si scompone a fratti semplici

$$\frac{x+3}{x^2+6x-7} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+7}$$

Si trova $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ e quindi

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x-7}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+7| + C = \frac{1}{2}\ln(|(x-1)(x+7)|) + C.$$

Concludiamo:

$$\int_{-6}^{0} \frac{x+3}{x^2+6x-7}dx = [\frac{1}{2}\ln(|(x-1)(x+7)|)]_{-6}^{0} = -\ln 7.$$

Controllate!!!

2) * $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-5}{x^2-3x+2}\,dx$ Cenni sulla soluzione: prima si osserva che

$$\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2} = x + \frac{-2}{(x+1)(x+2)}.$$

3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+20}\,dx$. Soluzione: poiche' $x^2+4x+20=(x+2)^2+16$ (irreducibile) si ha

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+20}\,dx = \int \frac{(x+2)-1}{16+(x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{16+(x+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{16+(x+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(16+(x+2)^2) - \frac{1}{4}\text{arctg}\,(\frac{x+2}{4}) + C.$$

Controllate!!!

4) $\displaystyle\int (3x-2)e^{-2x}\,dx$.

5) $\displaystyle\int (x^2+2x)e^{3x}\,dx$.

6) $\displaystyle\int x\cos(7x)\,dx$.

7) $\displaystyle\int (3x-2)\sin(2-3x)\,dx$.

8) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$. Soluzione: L'integrazione per parti implica:

$$\int x\ln(x+1)\,dx = \int \ln(x+1)\,d(\frac{x^2}{2}) = \ln(x+1)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2(x+1)}\,dx.$$

Concludiamo osservando che (calcoli elementari)

$$\frac{x^2}{2(x+1)} = \frac{1}{2}(x+1) - 1 + \frac{1}{2(x+1)},$$

e mediante integrali immediati otteniamo

$$\int \frac{x^2}{2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^2 - x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + C,$$

quindi la risposta e' (dopo semplificazioni) :

$$\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2+1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2 - x + C.$$

Controllate!!!

Osservazione: Non abbiamo scritto $\ln|x+1|$ come una primitiva poiche' gia' all'inizio e' stato scritto $\ln(x+1)$, cioe' deve essere valida la disequazione $x > -1$.

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(4x}dx$. Suggerimento: usare la sostituzione $t = \mathrm{tg}\,(2x)$ oppure prima $\xi = 4x$ e poi $t = \mathrm{tg}\,(\frac{\xi}{2})$

9)* $\displaystyle\int \frac{1}{7-3\cos x}dx$.

10)* $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$. Soluzione: poniamo $\eta = \sqrt{1+e^x}$. Quindi

$$x = \ln(\eta^2 - 1), \quad dx = \frac{2\eta}{\eta^2-1}d\eta$$

e otteniamo

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx = 2\int \frac{\eta^2}{\eta^2-1}\,d\eta$$

$$= 2\int 1\,d\eta + \int \frac{1}{\eta-1}\,d\eta - \int \frac{1}{\eta+1}\,d\eta = 2\eta + \ln\frac{\eta-1}{\eta+1} + C$$

e alla fine, sostituzione di η con $\sqrt{1+e^x}$. Controllate!!!

Integrali impropri (generalizzati)

Richiami sulle definzioni di integrali impropri (due tipi), il significato geometrico, criteri per l'esistenza (nonesistenza).

1.* Esercizi-domande del tipo teorico: ennunciare criteri per integrali impropri (generalizzati), l'esistenza o la nonesistenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha}dx$, variando $\alpha > 0$

2. Studiare gli integrali impropri e calcolare nel caso di esistenza:

a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{12}{(2x-5)^3}dx$. Soluzione: Si ha

$$\int_3^N \frac{12}{(2x-5)^3}dx = [-\frac{3}{(2x-5)^2}]_3^N = 3 - \frac{3}{(2N-5)^2} \to 3.$$

b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{12}{\sqrt{2x-5}}dx.$

c) $\displaystyle\int_{-19/2}^{-3/2} \frac{2}{|2x+3|^{3/4}}dx.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (2x+1)e^{2x}dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2xe^{-2x}dx.$

f) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{2x+1}dx.$

3. Esercizi del tipo: studiare se l'area della regione Ω nonlimitata e' finita, e se si, calcolarla, dove

a) Ω e' definita dal grafico di $f(x) = 2(2x+1)^{-3}$, $x > 0$.

b) Ω e' definita dal grafico di $f(x) = (3x+2)x^{-1/2}$, $x \in]0,3]$. Cenni sulla soluzione: si ha

$$(3x+2)x^{-1/2} = 3x^{1/2} + 2x^{-1/2},$$

quindi per l'area si ha

$$= \int_0^3 3x^{1/2}dx + \int_0^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$$

il primo integrale e' definito mentre il secondo e' improprio ma esiste (calcoli qausi immediati). Concludere.

c) Ω e' definita dal grafico di $f(x) = (3x+2)x^{-3/2}$, $x \in]0,3]$.

d) Ω e' definita dal grafico di $f(x) = (3x+2)^{-1/3}$, $x \in [-1,-2/3[$.

e) Ω e' definita dal grafico di $f(x) = -(1+2x)e^{3x}$, $x \in]-\infty,-1/2]$.