Analisi Matematica 1, Informatica
Università di Cagliari
Lezione 07. 11. 2006: sunto

N.B. Per maggiori dettagli, consultare le pagine rilevanti in uno dei testi.

Funzioni continue: f è continua in $x_0 \in I$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

t.c.

$$|x - x_0| < \delta, x \in I \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definzione equivalente (tramite successioni); proprietà; esempi.
Teoremi notevoli per funzioni continue:

Teorema (degli zeri). Sia $f \in C([a, b])$. Se i segni di $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi, cioè

$$f(a)f(b) < 0$$

allora esiste $c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = 0$.
Cenni sulla dimostrazione.
Conseguenze dal teorema degli zeri (se $f \in C(I)$ allora $J := Im(f)$ è un intervallo.

Un teorema importante:
Teorema (di Weierstrass). Sia $f \in C([a, b])$. Allora f ammette massimi e minimi assoluti, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c.

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad xin[a, b].$$

. In altre parole

$$f(x_1) = \min_{t \in [a,b]} f(t) \qquad f(x_2) = \max_{t \in [a,b]} f(t)$$

.

Funzioni monotone e continue, funzione inverse di una funzione continue e monotona in un intervallo.

Lezione 10. 11. 2006: sunto

N.B. Per maggiori dettagli, consultare le pagine rilevanti in uno dei testi.

Derivata: f è detta derivabile in $x_0 \in I$ se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

o

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m$$

Tale limite si chiama la derivata f in x_0. e si indica con $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Osservazione. Se l'argomento è il tempo t, si usa la notazione $\dot{f}(t)$.

Derivata destra, se $h \to 0^+$; derivata sinistra, se $h \to 0^-$.

Significato fisico della derivata: $\dot{u}(t)$ la velocita' instantanea nel momento t.
Significato geometrico: $f'(x_0)$ - il coefficiente angolare della retat tangente al grafico Γ_f della funzione f nel punto $.x_0$
L'equazione della retta tangente al grafico Γ_f della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0)$ ha la seguente forma

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Prime proprieta:

Proposizione. Se f e derivabile in x_0 allora f e continua in x_0.

Esempi di funzioni continue ma non derivabili.

Regole di derivazione
i) (derivata della soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

ii) (derivata di constante per funzione)

$$(cf(x))' = cf'(x),$$

essendo c una constante.
iii) (derivate del prodotto)

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

iv) (derivata del quoziente)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

o (nella forma equivalente)

$$(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

e poi si considera $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ che, insieme alla iii) implica

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)(-\frac{g'(x)}{g^2(x)})$$

Cenni sulle dimostrazioni: scriviamo il rapporto incrementale per $f(x)g(x)$. Si ha

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)f(x_0)}{h}g(x_0+h)$$

$$+f(x_0)\frac{g(x_0+h)g(x_0)}{h}$$

che tende per $h \to 0$ a

$$f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

Derivate di funzioni elementari

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(a^x)' = a^x \ln a$, in particolare, $(e^x)' = e^x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Teorema (la derivata di una funzione composta). Si ha

$$D(g \circ f(x)) = ((g(f(x)))'$$
$$= g'(f(x))f'(x) = g'(y)f'(x)$$

con $y = f(x)$.

In sintesi: la derivata della funzione composta = la derivate della funzione esterna $g(y)$ per la derivata della funzione interna $f(x)$.

Teorema (la derivata della funzione inversa). Sia $g(y) = f^{-1}(y)$ la funzione inversa di $f(x)$. Se $f(x)$ e derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora $g(y)$ e derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale

$$Df^{-1}(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

In sintesi: la derivata della funzione inversa e uguale alla 1 diviso alla derivata di f

Esercizi del tipo trovare la derivata di $f(x)$ e lequazione della retta tangente al Γ_f nel punto $(x_0, f(x_0)$, dove:
1) $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $x_0 = -2$.
2) $f(x) = \ln(2x^2 + \cos(\pi x))$, $x_0 = -1$
3) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)3^x}{1 + x^4}$, $x_0 = 0$
4) $f(x) = x^x$, $x_0 = 2$

Lezione 14. 11. 2006: sunto

Studio di masssimi e minimi

Massimi, minimi: definzioni, illustrazione geometrica.
Teorema (di Fermat). Sia f derivabile in $x_0 \in]a, b[$. Se $f(x)$ ammmette massimo o minimo (locale) e f e' derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0$$

In sintesi: la condizione necessaria affinche' uan funzione derivabile abbia massimo o minimo in un punto interno (x_0) sia la derivata della funzione nel punto $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Consideriamo il caso di massimo locale (libero), quindi esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x) \leq f(x_0)$ per $|x - x_0| \leq \delta$.

Scriviamo il rapporto incrementale e osserviamo che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{per} \quad 0 < h < \delta$$

e

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \text{per} \quad -\delta < h < 0$$

quindi, dal teorema della permanenza del segno, si ha $f'_+(x_0) \leq 0$ e $f'_-(x_0) \geq 0$ e poiche' f e' derivabile in x_0, cioe' $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, ne segue che $f'(x_0) = 0$. La dimostrazione per il caso di minimo usa gli stessi argomenti.

In sintesi: la condizione necessaria affinche' uan funzione derivabile abbia massimo o minimo in un punto interno (x_0) sia la derivata della funzione nel punto $f'(x_0) = 0$.

Condizione necessaria, ma non sufficiente.
Esempi: $f(x) = x^3$, $f(x) = -(x-2006)^{2005}$.

Generalizzazione della condizione necessaria per le derivate negli estremi del intervallo $[a,b]$.

Per massimo in a, (rispettivamente, in b) si ha
$f'(a) \leq 0$ (rispettivamente, $f'(b) \geq 0$.

Per minimo in a, (rispettivamente, in b) si ha
$f'(a) \geq 0$ (rispettivamente, $f'(b) \leq 0$.
Osservazione. Punti che annulano al derivata prima si chiamano punti critici, punti stazionari.

Teorema (di Rolle). Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in]a,b[$ t.c. $f'(c) = 0$.

Teorema (di Lagrange). Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste $c \in]a,b[$ t.c.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Monotonia e la derivata prima.

Teorema 1. Sia f derivabile in $]a,b[$. Allora f e' cresecente in $]a,b[$ se e solo se $f'(x) \geq 0,\ x \in]a,b[$. Analogamente, f e' decresecente in $]a,b[$ se e solo se $f'(x) \leq 0,\ x \in]a,b[$.

Teorema 2. Sia f derivabile in $]a,b[$. Se $f'(x) > 0, \quad x \in]a,b[$ ne segue che f e' strettamente crescente in $]a,b[$. Analogamente, se $f'(x) < 0, \quad x \in]a,b[$ ne segue che f e' strettamente decrescente in $]a,b[$.

Osservazione: Teorema 2 - solo condizione sufficiente. Esempi: Se $f(x) = \pm x^3$.

Abbiamo un approccio per studiare i massimi e minimi: punti critici, intervalli di monotonia, studio della funzione negli estremi.

Lezione 17. 11. 2006: sunto

Derivate di ordine superiore. Funzioni convesse, concave

La derivata seconda $D^2 f(x) = f''(x)$ e' la derivata della derivata prima: $D(Df(x) = (f'$ e cosi via.

Si usa la notazione

$$D^n f(x) = (f^{(n)}(x)$$

per la derivata n-esima con la convenzione $D^0 f(x) = (f^{(0)}(x) = f(x)$ (la derivata di ordine zero di $f(x)$ coincide con la funzione $f(x)$.

Una funzione f derivabile in $]a, b[$ e' detta convessa (rispettivamente, concava) se il grafico Γ_f e' al di sopra (rispettivamente, al di sotto) di ogni retta tangente al grafico, cioe'

$$f(\xi) \geq f(\eta) + f'(\eta)(\xi - \eta)$$

(rispettivamente,

$$f(\xi) \leq f(\eta) + f'(\eta)(\xi - \eta))$$

$\forall \xi, \eta \in [a, b]$

Diremo poi la funzione f strettamente convessa o strettamente concava se le diseguaglianze nelle definzione sopra sono verificate stretatmente per $\xi \neq \eta$, cioe' f e' strettamnte convessa (rispettivamente, strettamente concava) se
$f(\xi) > f(\eta) + f'(\eta)(\xi - \eta)$
(rispettivamente, $f(\xi) < f(\eta) + f'(\eta)(\xi - \eta),),$
$\forall \xi, \eta \in [a, b],\ \xi \neq \eta$

Un numero $c \in]a, b[$ e' detto punto di flesso se f e' strettamente convessa in $]c - \delta, c[$ e concava in $]c, c + \delta[$ o strettamente concava in $]c - \delta, c[$ e strettamnte convessa in $]c, c + \delta[$ per certo $\delta > 0$ (piccolo).
Esempi: x^2 e' strettamente convessa, mentre $-x^2$ e' strettamente concava in R.
Altre funzioni convesse (rispettivamente, concave): $(x - x_0)^{2k}$, per $k \in N$, $x_0 \in R$ e $\theta > 0$ (rispettivamente, $\theta < 0$.
Osservazione 1: La funzione lineare $f(x) = mx + n$ e simutaneamente convessa e concava, ma non e' ne strettamente convessa ne strettamente concava in ogni intervallo $]\alpha, \beta[$.

Osservazione 2: Esistono definzione piu' generali per la convessita' (concavita') per funzioni continue, senze chiedere la derivabilita': uan funzione continua e' convessa se ogni corda e al di sopra dell'arco del grafico definito dalla corda.
Teorem (criterio della convessita'): Sia f una funzione due volte derivabile in $]a, b[$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.
i) f e' convessa in $]a, b[$;
ii) f' e' crescente in $]a, b[$;
iii) $f''(x) \geq 0$ per $\forall x \in]a, b[$.
Analogamente per concava (in ii) crescente diventa decrescente, in iii) ≥ 0 diventa ≤ 0.

Inoltre, vale:

Proposizione. Se $f''(x) > 0$ per $x \in]a, b[$ allora f e' strettamente convessa in $]a, b[$. Analogamente, se $f''(x) < 0$ per $x \in]a, b[$ allora f e' strettamente concava in $]a, b[$.

Si osserva che evidentemente f e' convessa se e solo se $-f$ e' concava e viceversa, f e' concava se e solo se $-f$ e' convessa.

Per lo studio del grafico di una funzione, la convessita' e la concvita' si ottengono dallo studio della derivata seconda.

Le regole di De L'Hopital

Per lo studio di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. si possono usare le cosi dette regole di De L'Hopital. In sintesi, se

$$\lim_{x \to \lambda} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e' una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, f, g sono derivabili e esiste finito il limite

$$\lim_{x \to \lambda} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \omega$$

allora si ha

$$\lim_{x \to \lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \lambda} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \omega.$$

Non si dve esgagerare con la regola di L. Per esempio, se si chiede limiti legati ai notevoli, per esempio $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$.,ecc.

1) $\lim_{x\to\pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$; Si ha

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1/3(\operatorname{tg} x)^{2/3}1/\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = 1/6???$$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1+\sin(2x)}{1-\cos(4x)}$. Si applica due volte la derivazione.

Sul parziale n. 1 esercizi + domande teoriche inserite in modo naturale.

1) Estremi di insiemi numerici: trovare $\sup A$, $\inf A$ e la conscenza di definzioni base.
2)* Cenni sulla f-la di Newton, esercizi copncreti sul coeffienti binomiali.
Successioni: A parte esercizi, la capacita' di fare dimostrazione $\varepsilon > 0$, $f\nu > 0$ ecc, teorema per successioni monotone.
Limiti e funziuoni continue. A parte esercizi, teoremi notevoli, interpretazione geometrica su esempi concreti.
Calcolo differenziale. A parte esercizi coinvolgendo derivate, teoremi notevoli su esempi concreti.

N.B. Usare le notazioni matematiche per risparmiare spazio e tempo.

Formula di Taylor

Sia $f(x)$ definita e n volte derivabile nel'intervallo $I :=]a, b[$. Fissiamo $x_0 \in I$. L'idea principale puo' essere riassunta come segue: trovare un polinomio $P_n(x)$ di gardo n, si puo' scrivere nella forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

(per esteso $P_n(x) = a_0(x-x_0)^n + a_1(x-x_0)^{n-1} + \ldots + a_n$ tale che P_n e' la miggilore approssimazione di f di ordine $o((x-x_0)^n)$ cio'e

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) \qquad (Appr1)$$

per $x \to x_0$. Si ha: $\varphi(x)$ e' infinitesimo $o((x-x_0)^n)$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

La risposta e': vale (Appr1) se e solo se

$$a_k = (x-x_0)^n + a_1(x-x_0)^{n-1} + \ldots + a_n = \frac{D^k f(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

per $k = 0, 1, \ldots, n$ e

$$T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si chiama il polinomio di Taylor (di McLaurin se $x_0 = 0$

In sintesi, se f e' n volet derivabile in $]a, b[$ e , cioe' $x_0 \in]a, b[$ la formula di T.:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

dove il resto n -esimo R_n) soddisfa (Appr1).

Formule di Taylor (McLaurin) per funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x)$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n(x)$$

Integrali indefiniti

Si ha

$$\int f(x)\, dx = g(x) + C$$

se $g'(x) = f(x)$.
La funzione $g(x)$ si chiama primitiva di $f(x)$.

Proprieta':

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx, \qquad c \in R$$

Alcuni integrali indefiniti immediati:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \geq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

e in particolare $\int e^x \, dx = e^x + C$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

N.B. Si ricorda dalla definizone dell'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Esempio (con tutti i dettagli, certamente non e' necessario nei fogli per le risposte).

$$\int (6x^2 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 2^{3x}) \, dx$$

$$= 6 \int x^2 \, dx - 4 \int x^{-1/3} \, dx + \int 8^x \, dx$$

$$= 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + \frac{8^x}{\ln 8} + C$$

$$= 2x^3 - 6x^{2/3} + \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C$$

Una proprieta' importante:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Alcuni metodi per risolvere integrali indefiniti

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + C$$

dove $g'(y) = f(y)$.

Esempi.

$$\int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

$$\int \sin(3-7x)dx = -\frac{1}{7}(-\cos(3-7x)) + C$$

$$= \frac{1}{7}\cos(3-7x) + C$$

$$\int \frac{1}{(5-6x)^3}dx = \int (5-6x)^{-3}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{(5-6x)^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{1}{12}(5-6x)^{-2} + C$$

Osservazione. Dal $df(x) = f'(x)dx$ ne segue che

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$$

e quindi si puo' "pensare" $ax+b$ come se fosse una variabile y (o t).

Integrali definiti (di Riemann)

Sia $f : [a,b] \to R$ una funzione continua. Si considera una partizione D di $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

L'ampiezza:
$\delta_D := \max\limits_{k=1,\ldots,N} \Delta_k$,
dove $\Delta_k := x_k - x_{k-1}$

Si approssima il trapezoide curvilineo delimitato dal grafico Γ_f e l'intervallo $[a, b]$ per diffetto per ecesso tramite le somme superiori e le somme inferiori.

$$S_D(f) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k M_k, \quad M_k := \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$$s_D(f) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k m_k, \quad m_k := \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Osserviamo che se $f(x) \geq 0, \quad x \in [a, b]$ lo schema descritto sopra rappresenta il calcolo (per approssimazione, nel senso piu' fitta e' la partizione piu' precisa e' l'approssimazione) dell'area della regione sottostante il grafico di f e soprastante l'intervallo $[a, b]$

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x),\, x \in [a, b]$$

In fatti, la somma infroriore $s_D(f)$: e' la somma delle aree dei rettangoli iscritti, e analogamente per $S_D(f)$ - circoscritti ("metodo di esaustione"). Chiaramente $s_D(f) \leq S_D(f)$. L'integrale definito (di Riemann) di f:

$$\sup_D s_D(f) = \inf_D S_D(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Il significato geometrico: l'area "orientata" del dominio A delimitato dal grafico e l'intervallo di definizione. Se $f \geq 0$, allora

$$\int_a^b f(t\ , dt \quad = \quad \textbf{l'area di} \quad A$$

Se $f \geq 0$, allora

$$\int_a^b f(t)\, dt \quad = \quad \textbf{l'area di} \quad A$$

Inoltre, se A e' la regione curvilinea delimitata dai grafici di due funzioni $f_1(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b (f_2(t) - f_1(t))\, dt \quad = \quad \textbf{l'area di} \quad A$$

Il teorema della media:

Teorema (della media). Sia $f \in C([a, b])$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a)$$

Il significato geometrico: esiste un $\xi \in]a, b[$ t.c. l'area della regione definita da Γ_f = l'area del rattangolo con "base" $b - a$ e l'altezza $f(\xi)$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f \in C([a, b])$. Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]$$

Alloro si ha

i) F e' derivabile e

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in [a, b]$$

ii) se $g(x)$ e' una primitiva di f ne segue che

$$F(x) = g(x) - g(a), \qquad x \in [a, b]$$

In particolare,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = g(b) - g(a)$$

Si usano le notazioni

$$g(x)|_a^b = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

In sintesi: per calcolare l'integrale definito, basta trovare una primitiva (cioe' risolvere l'integrale indefinito) e poi calcolare l'incremento di una (qualsiasi) primitiva nell'intervallo $[a, b]$.

Esempi: Calcolare

$$\int_{\pi/20}^{\pi/5} \cos(10x)\,dx$$

Si ha

$$\int \cos(10x)\,dx = \frac{1}{10}\sin(10x) + C$$

quindi

$$\int_{\pi/40}^{\pi/20} \cos(10x)\,dx = [\frac{1}{10}\sin(10x)]_{\pi/40}^{\pi/20}$$

$$\frac{1}{10}\sin(\pi/2) - \frac{1}{10}\sin(\pi/4) = \frac{2 - \sqrt{2}}{20}$$

(controllate!!!).

Perche' la costante C che appaie nell'integrale indefinito e' irrelevante per il calcolo dell'integrale definito?

Trovare l'area della regione Ω delimitata da

i) $y = -x^2$ e $y = 3x$. Soluzione: si trova

$$\Omega = \{(x, y) : \, 3x \leq y \leq -x^2, \, -3 \leq x \leq 0\}$$

quindi, l'area

$$= \int_{-3}^{0} (-x^2 - 3x)dx = [-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}]_{-3}^{0} = \frac{9}{2}$$

Controllate !!!

ii) il grafico di $f(x) = 2^{3x}$ e l'intervallo $[0, \log_2(\sqrt[3]{7})]$.

Soluzione: si trova

$$\Omega = \{(x, y) : \, 0 \leq y \leq 2^{3x}, 0 \leq x \leq \log_2(\sqrt[3]{7})]\}$$

quindi, l'area

$$= \int_{0}^{\log_2(\log_2(\sqrt[3]{7})} 2^{3x}dx = [\frac{2^{3x}}{3\log_2 2}]_{0}^{\log_2(\sqrt[3]{7})}$$

$$= \frac{2^{3\log_2(\sqrt[3]{7})}}{3\log_2 2} - \frac{1}{3\log_2 2}$$

$$= \frac{2^{\log_2 7}}{3\log_2 2} - \frac{1}{3\log_2 2} = \frac{7-1}{3\log_2 2} = \frac{2}{\log_2 2}$$

Controllate !!!

Integrali di funzioni razionali

Sia $f(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\mu(x)}$ una funzione razionale, cioe' λ, μ sono polinomi. Ricordare (regola Ruffini per divisone di polinomi):

$$\frac{\lambda(x)}{\mu(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\mu(x)}$$

Calcolare gli integrali

1) $\displaystyle\int \frac{x-15}{x^2-6x-7}dx$:

Soluzione. Poiche' $x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$ si scompone a fratti semplici

$$\frac{x-15}{x^2-6x-7} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-7}$$

Si ha

$$\frac{x-15}{x^2-6x-7} = \frac{A(x-7) + B(x+1)}{(x+1)(x-7)}$$

quindi $x-12=(A+B)x+(-7A+B)$, otteniamo un sistema lineare $2\times$

$$A+B=1, \qquad -7A+B=-15$$

l'unica soluzione $A=2, B=-1$, quindi

$$\int \frac{x-12}{x^2-6x-7}dx$$

:

$$=2\int \frac{1}{x+1}dx-\int \frac{1}{x-7}dx 2\ln|x+1|-\ln|x-7|+C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

Cenni sulla soluzione: si ottiene

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

e poi, due integrali immediati.

2) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}\,dx$

Poiche' $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ (irreducibile) si ha

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}\,dx=\int \frac{2(x-2)+7}{1+(x-2)^2}\,dx$$

$$\int \frac{2(x-2)}{1+(x-2)^2}\,dx+\int \frac{7}{1+(x-2)^2}\,dx=\ln(1+(x-2)^2)+7\text{arctg}\,(x-2)+C$$

Integrazione per parti

La regola:

$$\int, f'(x)g(x)\,dx = \ f(x)g(x)\ -\ \int\ g'(x)f(x)\,dx$$

si scrive anche nella forma

$$\int, g(x)\,df(x) = \ f(x)g(x)\ -\ \int\ f(x)\,dg(x)$$

Risolvere $\displaystyle\int, xe^{2x}\,dx$. Si ha

$$\int, xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int\ x\,d(e^{2x})$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int\ e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Sostituzione (cambiamento delle variabili)

La regola:

$$\int, f(x)\,dx = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy$$

Esempio:

$$\int, \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Poniamo $\int, x = a\sin t$ e otteniamo

$$dx = acosttdt, \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$$

Perche' ils egno infronte di coseno e' +? Quindi, l'integrale

$$= \int a^2\cos^2 t\,dx = \frac{a^2}{2}\int \cos(2t))\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin(2t))$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t cost) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a})t + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}) + C$$

ecc. (si puo' simplificare ancora).

Integrazione di funzioni razionali di coseno e seno;

$$= \int R(\cos x, \sin x)dx$$

tramite

$$t = \mathrm{tg}\,(\frac{x}{2}), \quad x = 2\mathrm{arctg}\,t$$

Quindi, si ha $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt.$

Si osserva che valgono le formule

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{2\mathrm{tg}\,(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

.

Esercizi:

1)

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\mathrm{tg}\,(x/2)| + C$$

2)

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt = \int (\frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{1-t})dt$$

e si conclude con il calcolo o usando il fatto che $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ si riduce sul 1).

Altri metodi per il calcolo di integrali

Poniamo

$$I = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx, \quad J = \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$$

essendo $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Si ha (mediante il metodo "integrazione per parti"):
1^o approccio (due volte integrazione per parti):

$$I = \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{1}{\alpha}\int \cos(\beta x)d(e^{\alpha x})$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I$$

quindi

$$-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}I = \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C$$

ecc. Analogamente si puo' trovare J (due volte integrazione per parti).
2^o approccio (una volta integrazione per parti e un sistema per I e J):

$$I = \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha}J$$

$$J = \frac{1}{\alpha}\cos(\beta x)e^{\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}I$$

Integrali del tipo I_n, $n = 1, 2, \ldots$, (integrazione per parti + successioni di ricorrenza):
Se

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} dx,$$

essendo $a > 0$, si ha (per $n \geq 2$):

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^+ x^- x^2}{(a^2 + x^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int x(a^2 + x^2)^{-n} d(a^2 + x^2)$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2} \int x d[(a^2 + x^2)^{-n+1}]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 +^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

quindi

$$I_n = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 +^2)^{n-1}}$$

Cenni su funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

l'identita'

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Funzioni iperboliche sono utili per il calcolo di integrali del tipo

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

mediante la sostituzione

$$x = a\cosh t$$

Integrali impropri (generalizzati)

Se $f \in C(]a, b])$ e $\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \infty$ si considera l'esistenza dell'integrale improprio (generalizzato) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

La definizione (esiste se esiste finito il limite)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Analogamente, se $f \in C([a,b[)$ e $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Il significato geometrico (se $f \geq 0$): l'area della figura nonlimitata definita dal grafico di f e l'inttervallo.
Se $f \in C(]a,b])$ e $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$ si considera l'esistenza dell'integrale improprio (generalizzato) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

La definizione (esiste se esiste finito il limite)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Analogamente, se $f \in C([a,b[)$ e $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Il significato geometrico (se $f \geq 0$): l'area della figura nonlimitata definita dal grafico di f e l'inttervallo.

Esempi: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ esiste finito se e solo se $\alpha < 1$.

Se $f \in C([a, = \infty)$ si considera l'esistenza dell'integrale improprio (generalizzato) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

La definizione (esiste se esiste finito il limite)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

Analogamente, se $f \in C(]-\infty,b])$ si ha

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)dx.$$

Il significato geometrico (se $f \geq 0$): l'area della figura nonlimitata definita dal grafico di f e l'inttervallo nonlimitato.

Esempi: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ esiste finito se e solo se $\alpha > 1$.

Criteri per l'esisetnza di integrali generalizzati:

Proposizione 1. Se esiste $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ allora esiste anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e si ha

$$|\int_a^{+\infty} f(x)dx| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Proposizione 2. Siano $f, g \in C([a, +\infty[$ tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \qquad x \geq a.$$

Allora:

i) se esiste $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ allora esiste anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ non esiste (in breve $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$) allora non esiste anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$, cioe'

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty.$$

Criterio del confronto asintotico. Supponiamo che che

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \varkappa \neq 0$$

percerto $\alpha > 0$. Allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ esiste se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizi.

1. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{12}{(2x-5)^3}dx.$

   Si ha

$$\int_3^N \frac{12}{(2x-5)^3}dx = [-\frac{3}{(2x-5)^2}]_3^N = 3 - \frac{3}{(2N-5)^2} \to 3.$$

2. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{12}{\sqrt{2x-5}}dx.$

3. $\displaystyle\int_{-19/2}^{-3/2} \frac{2}{|2x+3|^{3/4}}dx.$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (2x+1)e^{2x}dx.$