1. Verificare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y) = e^x\,y + (x-1)^2\cos y + 2x - 1 = 0$$

definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(0,0)$. Mostrare che tale funzione ha un minimo relativo.

2. Verificare che il punto $(0,0)$ è un punto critico per la funzione $y = f(x)$ definita implicitamente dalla relazione

$$F(x,y) = x^2 + y^2\,e^{2xy} - 2xy = 0$$

nell'intorno del punto $(0,1)$ e precisare se si tratta di massimo o minimio.

3. Verificare che la funzione $y = f(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$F(x,y) = x^2 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cos y = 0$$

in un intorno di $(0, \frac{\pi}{2})$ ha ivi un minimo relativo.

4. Usate il teorema del Dini per mostrare che $F(x,y) = x^2 + y^2 - 29$ definisce y come funzione continua e derivabile di x in ogni intorno di $(5,2)$ che non contenga punti dell'asse x. Calcolare la derivata in tale punto.

5. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y) = y^3 + xy - 12 = 0$$

definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(2,2)$. Calcolare la derivata in tale punto e determinare la retta tangente alla curva $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ in tale punto.

6. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y) = e^x\,\sin y + e^y\,\sin x - 1 = 0$$

definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(0, \frac{\pi}{2})$. Calcolare la derivata in tale punto e determinare la retta tangente alla curva $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ in tale punto.

7. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 + 2z = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 0, 0)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in tale punto.

8. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in tale punto.

9. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y) = x^3 - x^2 y + xy^3 - y^3 - 1$$

definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(1, 0)$. Calcolare la derivata in tale punto e determinare la retta tangente alla curva $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ in tale punto.

10. Trovare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = x + 3y + 2z - \ln |z| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(-2, 0, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in tale punto.