Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} - 5y^{(3)} - 36y' = 0.$$

2. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{(n+2)\log^2(n+2)},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? Qual'è il suo raggio di convergenza?

3. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = \frac{T}{2} - |x|$ per $|x| < \frac{T}{2}$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   c. È permessa la sua integrazione termine a termine tra $\hat{x} = 0$ e $\hat{x} = x$ per $x \in (0, \frac{T}{2})$? Poichè si o poichè no?

   *d.** Utilizzare l'identità di Parseval per dimostrare che

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

   a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   b. Costruirne una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se esiste. Se non esiste, dimostrare la sua non esistenza.

[1] 26.04.2006

5. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(z) = \left(z\ \cos(\frac{\pi}{2} \ln(\frac{1}{z})), z\ \sin(\frac{\pi}{2} \ln(\frac{1}{z})), z \right), \qquad z_0 \leq z \leq 1,$$

dove $0 < z_0 < 1$. Tracciare la curva.

6. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(7)} + 64y' = 0.$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2	6
3	6
4	5
5	4
6	5
totale	30