

Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4¹

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0.$$

- 2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 3\frac{1}{x^2}y = 2x^3,$$

osservando che $y_1(x) = (1/x)$ e $y_2(x) = x^3$ sono soluzioni della corrispondente equazione omogenea.

- 2B. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[3^n + 2^n](-5x)^n}{2^n + 5^n},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente?

- 3A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale²

$$y' = -\frac{x(y^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si riesce (e poichè sì o poichè no) trovare una soluzione $y : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale tale che $y(1) = 1$?

- 3B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = \cosh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}]$ per $-\frac{1}{2}T \leq x < \frac{1}{2}T$.

- Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
- È uniforme (in $x \in \mathbb{R}$) la convergenza della sua serie di Fourier? Poichè sì o poichè no?

¹04.05.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà gli esercizi 2A, 3A e 6A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà gli esercizi 2B, 3B e 6B.

²La soluzione generale è da rappresentare nella forma $y = F(x, \text{cost.})$.

c. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\left(e^{2x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(1 + 3y^2 - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy.$$

a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| > 0\}.$$

Se esiste, costruirne una primitiva.

b. Esiste una primitiva nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$?
Perchè esiste o perchè non esiste?

5. Calcolare la lunghezza della curva spaziale definita in coordinate cilindriche da

$$\rho(\theta) = e^{-\theta}, \quad z(\theta) = e^{-\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

6A. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra le coniche di equazione $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

6B. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - 8y = 0.$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2A-2B	6
3A-3B	6
4	5
5	4
6A-6B	5
totale	30