Secondo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Determinare il minimo e il massimo della funzione

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

sotto il vincolo $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. Interpretare il risultato geometricamente.

2. Determinare l'equazione del piano tangente all'iperboloide $z = 16xy$ nel punto $(2, 1, 32)$.

3. Calcolare l'area della porzione del piano $x+z = 1$ all'interno della sfera di equazione $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$.

4. Sia S la superficie composta dalla parte della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ sopra il piano $z = 0$ e dal disco $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^3, y^3, z^3)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν.

5. Sia S la parte della superficie di equazione $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^2, z^3, y^2)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν.

6. Consideriamo la trasformazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad u = \sin(x)\cosh(y), \quad v = \cos(x)\sinh(y).$$

Trovare tutti i punti $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ che hanno un intorno U in cui esiste la funzione inversa $f^{-1} : U \to X$ (con $X \subset \mathbb{R}^2$).

[1] 6.06.2005