Secondo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare il minimo e il massimo della funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

nel dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 36\}$. Interpretare il risultato geometricamente.

2. Determinare l'equazione del piano tangente all'iperboloide $z = x^2 - 2y^2$ nel punto $(2, 1, 2)$.

3. Calcolare l'area della porzione del piano $x + z = 2$ all'interno del dominio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$. Com'è fatta l'intersezione del piano e della paraboloide?

4. Sia S la superficie di equazione

$$z = \begin{cases} 9 - x^2 - y^2 & \text{se } z \geq 0, \\ -\sqrt{9 - x^2 - y^2} & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^3, y^3, z^3)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν.

5. Sia S la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq -1\}.$$

Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (y^4, z^3, x^2)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν.

6. Consideriamo la trasformazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad u = x^2 - y^2, \quad v = xy.$$

Trovare tutti i punti $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ che hanno un intorno U in cui esiste la funzione inversa $f^{-1} : U \to X$ (con $X \subset \mathbb{R}^2$).

[1] 7.06.2006