Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 3x^2(y^2 + 1)$$

e indicare la soluzione che verifica la condizione $y(\pi) = -1$.

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \sinh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$ sotto il vincolo $x+2y+3z = 6$ e interpretare il risultato geometricamente. Poichè è un minimo il punto trovato?

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Per quali punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}? Poichè non esiste la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

5. Calcolare l'area della porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra l'iperboloide $z = 2xy$ e sopra il piano xy. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato. Spiegare poichè si trova lo stesso risultato per $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$ se $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

[1] 17.06.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cosh(t)\cos(t), \cosh(t)\sin(t), t), \qquad 0 \leq t \leq \ln(2).$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[2]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 64y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3x^2 + 2}{2(y-1)}.$$

Indicare una funzione continua $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ che è soluzione per $x > 0$ e verifica la condizione $y(0^+) = 1$. Poichè non si riesce a trovare una soluzione $y(x)$ in un intorno di $x = 0$ che verifica la condizione $y(0) = 1$?

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x \leq T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto i vincoli $x+2y+3z = 6$ e $3x+y+2z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente.

[2]08.07.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y,z) = y - 2x + \ln|xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x,y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(1,2,-1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\text{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[3]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 16y = 0.$$

[3] 23.09.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2}{2(y+1)}.$$

Indicare una funzione continua $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ che è soluzione per $x > 0$ e verifica la condizione $y(0^+) = 1$.

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $0 \leq x \leq T/2$ e $f(x) = -x^2$ per $-T/2 \leq x < 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $3x + 2y + z = 12$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln |xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, -1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 1 - 2(x^2 + y^2)$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, \frac{2}{3} t^3), \qquad 0 \leq t \leq 3.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[4]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} - y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2+2}{2(y+1)}.$$

Anche trovare la soluzione y sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$.

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x \leq T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln |xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

[4] 24.02.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

   e S è la porzione della superficie sferica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = \left(3t, 4t, \frac{5}{2}[e^t + e^{-t}]\right), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.