Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 64y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3x^2+2}{2(y-1)}.$$

Indicare una funzione continua $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ che è soluzione per $x > 0$ e verifica la condizione $y(0^+) = 1$. Poichè non si riesce a trovare una soluzione $y(x)$ in un intorno di $x = 0$ che verifica la condizione $y(0) = 1$?

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x \leq T/2$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto i vincoli $x+2y+3z = 6$ e $3x+y+2z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y,z) = y - 2x + \ln|xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x,y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(1,2,-1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ in questo punto.

[1] 08.07.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.