

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4¹

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - 64y'' = 0.$$

2. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo 2π tale che $f(x) = x$ per $-\pi \leq x < \pi$.

- a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
- b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.
- c. È permessa l'integrazione termine a termine? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sotto i vincoli

$$x + y + z = 6, \quad x + 2y + 3z = 12.$$

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

- a. È chiusa?
- b. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
- c. Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ lungo lo spirale logaritmico γ di equazione (in coordinate polari) $r = e^{-\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Motivare le tre risposte.

5. Calcolare l'area del "semitoro" di equazione

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \sqrt{2z - z^2}, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

¹13.07.2007.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}, \nu) d\sigma$, dove

$$\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(1, 1, 1),$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (2 \cosh(t), \cos(2t), \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.