

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4¹

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 16y = 0.$$

- 2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2}{2(y+1)}.$$

Indicare una funzione continua $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ che è soluzione per $x > 0$ e verifica la condizione $y(0^+) = 1$.

- 2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $0 \leq x \leq T/2$ e $f(x) = -x^2$ per $-T/2 \leq x < 0$.

- a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
- b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $3x + 2y + z = 12$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln |xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, -1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$.

¹23.09.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\text{rot } \vec{F}, \nu) d\sigma$, dove

$$\vec{F} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloida $z = 1 - 2(x^2 + y^2)$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{2}{3}t^3\right), \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.