Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(6)} - y^{(4)} + y'' - y = 0.$$

2. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = T - |x|$ per $-T/2 \leq x < T/2$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.
   c. Utilizzare la formula di Parseval per calcolare
$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

3. Calcolare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione
$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$$
nel dominio
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 49\}.$$

4. Stabilire, mediante il teorema del Dini, se la seguente equazione
$$F(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 = 8$$
definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno di ciascuno dei punti $(2, 0, 0)$ e $(1, 1, 2)$. Determinare l'equazione della retta tangente nel punto $(1, 1, 2)$.

5. Calcolare l'area della porzione del cono di equazione $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ per (x, y) che soddisfano $0 \leq (x/\sqrt{3}) \leq y \leq x\sqrt{3}$ e $0 \leq z \leq 4\sqrt{3}$.

[1]24.09.2007.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x), \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 9 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

7. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

per $0 \le x \le 1$. Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})\right) = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.