Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(7)} + 64y' = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = x \operatorname{cotg} y.$$

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x$ per $-T/2 \leq x < T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $3x + 2y + z = 12$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la forma differenziale
$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)\, dx - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

   a. È chiusa?

   b. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

   c. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

   Motivare le tre risposte.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ per $z \geq 0$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

[1] 2.02.2007. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (z, x, y)$$

   e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ per cui $0 \leq z \leq 3$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, \cos\alpha \cosh t, \sin\alpha \cosh t), \qquad 0 \leq t \leq \ln(3),$$

   al variare di α.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.