Secondo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Determinare il minimo della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$
sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente. **Soluzione**: Calcolando le derivate parziali prime della funzione ausiliaria $H(x,y,z,\lambda) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$ otteniamo
$$2x - \lambda = 0,\ 8y - 2\lambda = 0,\ 18z - 3\lambda = 0,\ x + 2y + 3z = 6.$$
Quindi $(x,y,z) = (\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{1}{6}\lambda)$ e $\lambda = 4$. Dunque $(x,y,z) = (2,1,\frac{2}{3})$ e $f_{\text{min}} = 12$. Abbiamo trovato l'ellissoide con semiassi proporzionali a $(6,3,2)$ che ha $x + 2y + 3z = 6$ come uno dei suoi piani tangente.

2. Determinare l'equazione del piano tangente alla paraboloide $z = 16 - x^2 - 4y^2$ nel punto $(2,1,8)$. **Soluzione**: Parametrizzando la superficie dall'equazione $\Phi(x,y) = (x,y,16 - x^2 - 4y^2)$ si trova
$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x & -8y \end{pmatrix},$$
e dunque $A(x,y) = 2x$, $B(x,y) = 8y$ e $C(x,y) = 1$. Quindi il piano tangente nel punto (x_0,y_0,z_0) ha l'equazione $2x_0(x-x_0)+8y_0(y-y_0)+1\cdot(z - z_0) = 0$ oppure $2x_0x + 8y_0y + z = 16 + x_0^2 + 4y_0^2$. Per il punto $(2,1,8)$ si trova $4x + 8y + z = 24$.

3. Calcolare l'area della porzione del piano $x+z = 1$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. **Soluzione**: Parametrizzando la superficie dall'equazione $\Phi(x,y) = (x,y,1 - x)$ definita nel dominio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, si trova
$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
implicando $A(x,y) = 1$, $B(x,y) = 0$, $C(x,y) = 1$ e $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2}$. Quindi l'area è $\iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,\text{Area}(D) = \pi\sqrt{2}$.

[1] 8.06.2004

4. Sia S la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ e sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (z,y,x)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}},\nu)\,d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν. **Soluzione**: Sia ν il versore normale esterno. Secondo il teorema della divergenza si calcoli prima $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}=1$. Poi segue, per $D=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$,

$$\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}},\nu)\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{F}}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(D) = \frac{4\pi}{3}.$$

5. Sia S la parte della superficie di equazione $z=4-x^2-y^2$ che si trova sopra il piano $z=0$. Sia $\vec{\boldsymbol{F}}=(y^2,z^3,x^2)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\nu)\,d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν. **Soluzione**: La curva di bordo γ è la circonferenza $x^2+y^2=4$ nel piano xy, con l'orientamento antiorario. Quindi secondo il teorema di Stokes risulta

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\nu)\,d\sigma = \int_\gamma (y^2\,dx + z^3\,dy + x^2\,dz) = \int_\gamma y^2\,dx,$$

dove il versore normale ν alla superficie è tale che nell'apice $(0,0,4)$ della paraboloide è uguale a $(0,0,1)$. Parametrizzando γ dall'equazione $\varphi(t)=(2\,\cos t, 2\,\sin t)$ per $0\le t\le 2\pi$, si ha

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\nu)\,d\sigma &= \int_\gamma y^2\,dx = -8\int_0^{2\pi} \sin^3 t\,dt \\ &= 8\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)(-\sin t)dt = 8\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

6. Verificare, mediante il teorema delle funzioni implicite, che la seguente equazione

$$F(x,y) = x^2\,e^{x+y} + (x-1)^2\cos y = 0$$

definisce una funzione $y=f(x)$ in un intorno del punto $(0,\frac{\pi}{2})$. Determinare l'equazione della retta tangente in questo punto. **Soluzione**: Calcoliamo $F_x(x,y)=(2x+1)e^{x+y}+2(x-1)\cos y$ e $F_y(x,y) = x^2\,e^{x+y}-(x-1)^2\sin y$. Siccome $F_y(0,\frac{\pi}{2})=-1$, esistono un intorno U di 0 e una funzione $f:U\to\mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $F(x,f(x))=0$ per $x\in U$. Osserviamo anche che $F_x(0,\frac{\pi}{2})=0$, che implica $f'(\frac{\pi}{2})=0$. Quindi la retta tangente al punto $(0,\frac{\pi}{2})$ ha l'equazione $y=\frac{\pi}{2}$.