Secondo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Determinare il minimo e il massimo della funzione

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

sotto il vincolo $x^2+4y^2+9z^2 = 36$. Interpretare il risultato geometricamente. **Soluzione**: Sia $H(x,y,z,\lambda) = x+2y+3z-\lambda(x^2+4y^2+9z^2-36)$. Allora

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 2 - 8\lambda y = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 3 - 18\lambda z = 0,$$

più il vincolo $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. Ovviamente $\lambda \neq 0$. Sostituendo $(x,y,z) = (\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{6\lambda})$ nel vincolo, otteniamo $\lambda = \pm 1/4\sqrt{3}$ e $(x,y,x) = \pm(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$. Questi punti corrispondono ai valori estremi $\pm 6\sqrt{3}$. I piani $x + 2y + 3z = \pm 6\sqrt{3}$ sono piani tangenti alla superficie.

2. Determinare l'equazione del piano tangente all'iperboloide $z = 16xy$ nel punto $(2,1,32)$. **Soluzione**: Scegliendo per $D$ un dominio in $\mathbb{R}^2$ qualsiasi che contiene $(2,1)$, sia $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,y) = (x,y,16xy)$. Allora

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 16y & 16x \end{pmatrix}.$$

Dunque $(A,B,C) = (-16y, -16x, 1)$. Sostituendo $(x,y) = (2,1)$ risulta $(A,B,C) = (-16,-32,1)$. Quindi l'equazione del piano tangente è $-16(x-2) - 32(y-1) + 1(z-32) = 0$, oppure $16x + 32y - z = 32$.

3. Calcolare l'area della porzione del piano $x+z = 1$ all'interno della sfera di equazione $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$. **Soluzione**: Sostituendo $z = 1 - x$ otteniamo $x^2 + y^2 + (x+1)^2 \leq 4$ oppure $2(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{13}{4}$. Sul dominio ellittico $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{13}{4}\}$ [con semiassi di lunghezza $b = \sqrt{\frac{13}{8}}$ e $a = \sqrt{\frac{13}{4}}$] definiamo $\Phi(x,y) = (x,y,1-x)$. In tal caso $(A,B,C) = (1,0,1)$ e $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{2}$. L'area è uguale a $\iint_D \sqrt{2}\,dxdy$ oppure $\sqrt{2}$ per l'area dell'ellisse $\pi ab = \frac{13\pi}{4\sqrt{2}}$. Quindi l'area vale $\frac{13}{4}\pi$.

[1] 6.06.2005

4. Sia $S$ la superficie composta dalla parte della paraboloide $z = 4-x^2-y^2$ sopra il piano $z = 0$ e dal disco $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^3, y^3, z^3)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale $\nu$. **Soluzione**: Abbiamo $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Essendo $\nu$ il versore normale esterno e $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ e applicando il Teorema della Divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma &= \iiint_V \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{F}}\, dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\, dr \int_0^{4-r^2} dz\, 3r^2 = 2\pi \int_0^2 3r^3(4-r^2)\, dr \\ &= 2\pi \left[3r^4 - \frac{1}{2}r^6\right]_0^2 = 32\pi.\end{aligned}$$

5. Sia $S$ la parte della superficie di equazione $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^2, z^3, y^2)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale $\nu$. **Soluzione**: La curva di frontiera $\partial S$ della superficie $S$ è la circonferenza $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 3\}$ di raggio $\sqrt{3}$ con orientamento antiorario. In tal caso si scelga il versore normale $\nu$ in tal modo che $\nu = (0, 0, 1)$ nell'apice $(0, 0, 3)$. Applicando il Teorema di Stokes risulta[2]

$$\begin{aligned}\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma &= \oint_{\partial S} (x^2\, dx + z^3\, dy + y^2\, dz) \\ &= \oint_{\partial S} x^2\, dx \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\cos\theta)^2\, d(\sqrt{3}\cos\theta) \\ &= 3\sqrt{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Alternativamente, si ha $\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = (2y - 3z^2, 0, 0)$, mentre per $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\tan\alpha = 2$

$$\begin{cases}\Phi : [0, \pi - \alpha] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \\ \Phi(\varphi, \theta) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 1 + 2\cos\varphi),\end{cases}$$

[2] Sulla curva $\partial S$ abbiamo $z^3 = 0$ e $dz = 0$.

definisce la superficie $S$. In tal caso

$$(A,B,C) = (4\sin^2\varphi\cos\theta, 4\sin^2\varphi\sin\theta, 4\sin\varphi\cos\varphi),$$

$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 4\sin\varphi$ e $\nu = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$. Quindi

$$\begin{aligned}\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi-\alpha} d\varphi\, 32\sin^4\varphi(\sin\theta - 6\cos^2\varphi)\cos\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi-\alpha} d\varphi\,[16\sin^4\varphi\sin(2\theta) - 192\sin^4\varphi\cos^2\varphi\cos\theta] = 0,\end{aligned}$$

poichè $\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = 0 = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$.

6. Consideriamo la trasformazione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), \quad u = \sin(x)\cosh(y), \quad v = \cos(x)\sinh(y).$$

Trovare tutti i punti $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ che hanno un intorno $U$ in cui esiste la funzione inversa $f^{-1}: U\to X$ (con $X\subset\mathbb{R}^2$). **Soluzione**: Abbiamo per la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix}\cos(x)\cosh(y) & -\sin(x)\sinh(y)\\ \sin(x)\sinh(y) & \cos(x)\cosh(y)\end{pmatrix},$$

con determinante $J = \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y)$. Lo Jacobiano $J$ si annulla se e solo se $y=0$ e $\cos(x)=0$, oppure se e solo se $(u,v)=(\pm1,0)$. Di conseguenza, se $(u_0,v_0)\neq(\pm1,0)$, esiste un intorno $U$ di $(u_0,v_0)$ in cui esiste la funzione inversa $f^{-1}: U\to X$ (con $X\subset\mathbb{R}^2$), secondo il Teorema delle Funzioni Inverse. Per trovare $f^{-1}$ esplicitamente,[3] si osservi che per ogni $y\in\mathbb{R}$ l'insieme $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : (u/\cosh(y))^2 + (v/\sinh(y))^2 = 1\}$ rappresenta un ellisse con fuochi $(\pm1,0)$ e che per ogni $x\in\mathbb{R}$ (per cui $\sin(x)\neq0$ e $\cos(x)=0$) l'insieme $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : (u/\sin(x))^2 - (v/\cos(x))^2 = 1\}$ rappresenta un iperbole con fuochi $(\pm1,0)$. Quindi

$$\begin{aligned}\cosh(y) &= \frac{\sqrt{(u-1)^2+v^2} + \sqrt{(u+1)^2+v^2}}{2},\\ |\sin(x)| &= \frac{|\sqrt{(u-1)^2+v^2} - \sqrt{(u+1)^2+v^2}|}{2}.\end{aligned}$$

[3] Non fa parte della soluzione.