

METODI MATEMATICI AVANZATI

Corso di 6 Crediti
Corso di Laurea Specialistica
in Fisica

Cornelis VAN DER MEE
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX)
cornelis@bugs.unica.it
<http://bugs.unica.it/~cornelis>

Indice

I	EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA	1
1	Classificazione delle equazioni alle derivate parziali	1
2	Coordinate ortogonali	3
3	Separazione delle variabili	6
4	Equazione di Helmholtz	11
4.1	Equazione di Helmholtz sull'Intervallo	11
4.2	Equazione di Helmholtz sul Rettangolo	15
5	Equazioni delle onde e del calore	17
5.1	Equazioni delle onde e del calore sull'intervallo	17
5.2	Equazioni delle onde e del calore sul rettangolo	19
II	EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI	23
1	Richiami sulle Equazioni Differenziali di Secondo Specie	23
2	Metodo di Frobenius	25
3	Funzioni Ipergeometriche	30
4	Funzioni di Bessel	33
4.1	Definizione e proprietà semplici	34
4.2	Funzioni di Bessel di seconda specie	36
4.3	Ortogonalità e zeri	38
4.4	Altre funzioni cilindriche	42
4.5	Funzioni sferiche di Bessel	43
5	Funzioni sferiche	45
5.1	Funzioni sferiche	45
5.2	Polinomi di Legendre	47
5.3	Funzioni di Legendre associate	52
5.4	Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza	53
6	Polinomi di Hermite	54
7	Polinomi di Laguerre	58
8	Polinomi di Chebyshev	63
9	Polinomi Ortogonali	65

III EQUAZIONI INTEGRALI	69
1 Proprietà Elementari e Iterazione	69
2 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano	74
3 Teorema di Hilbert-Schmidt	79
IV PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE	83
0 Introduzione	83
1 Problemi agli autovalori	83
1.1 Impostazione del problema agli autovalori	83
1.2 Formule di Green	84
1.3 Proprietà dell'operatore L	85
2 Problema di Sturm-Liouville	89
2.1 Funzione di Green	90
2.2 Riduzione ad un'equazione integrale	93
2.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni	95
3 Problemi di Sturm-Liouville singolari	98
V TEORIA DEI GRUPPI	103
0 Introduzione	103
1 Gruppi Astratti	103
2 Gruppi Discreti — Gruppi Finiti	110
3 Gruppi Continui — Gruppi di Lie	113
4 Rappresentazioni di Gruppi	127
A LA FUNZIONE GAMMA	137
B ANALISI FUNZIONALE	143
1 Spazi di Banach	143
2 Spazi di Hilbert	145
3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert	147
4 Applicazioni	149
Bibliografia	150

Capitolo I

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1 Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine superiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \quad (\text{I.1})$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$ definiti su un aperto $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (I.1) soddisfa la condizione di simmetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ reale,} \quad x \in G. \quad (\text{I.2})$$

Esempi importanti dell'equazione (I.1) sono l'equazione di Poisson n -dimensionale¹

$$\Delta u = -f, \quad (\text{I.3})$$

dove $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (la delta di Kronecker), l'equazione delle onde n -dimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \quad (\text{I.4})$$

dove $a_{00}(x) = 1$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = -c^2$ ($i = 1, \dots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$, e l'equazione del calore n -dimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (\text{I.5})$$

¹ Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad.}$

dove $a_{00}(x) = 0$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = a^2$ ($i = 1, \dots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$.

All'equazione (I.1) si associa la matrice $n \times n$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad (\text{I.6})$$

che dipende soltanto dai termini con le derivate parziale del secondo ordine. Grazie alla (I.2), la matrice $A(x)$ è reale e simmetrica. Quindi $A(x)$ ha n autovalori reali $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$. Inoltre esiste una matrice ortogonale $O(x)$ (cioè, $O(x)^T = O(x)^{-1}$ e la $O(x)$ è reale) tale che

$$O(x)^{-1}A(x)O(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)), \quad (\text{I.7})$$

dove la parte a destra è una matrice diagonale. La colonna j -esima della $O(x)$ è un autovettore (di norma euclidea 1) della $A(x)$ corrispondente all'autovalore $\lambda_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$). Le colonne della $O(x)$ costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo \mathbb{R}^n .

Introduciamo la seguente classificazione delle equazioni (I.1) che soddisfano la (I.2). Tale equazione si dice

- a. *ellittica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero e hanno lo stesso segno.
- b. *iperbolica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero, ma non tutti hanno lo stesso segno. La (I.1) si dice *di tipo iperbolico normale* se è iperbolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.
- c. *parabolica* se almeno uno degli autovalori (ma non tutti) si annullano. La (I.1) si dice *di tipo parabolico normale* se è parabolica e tutti gli autovalori non nulli hanno lo stesso segno.

Torniamo agli esempi (I.3), (I.4) e (I.5):

(I.3): Si ha $A(x) = \text{diag}(1, \dots, 1)$ di ordine n . Tutti gli autovalori sono uguali ad 1 e quindi l'equazione di Poisson è ellittica.

(I.4): Si ha $A(x) = \text{diag}(1, -c^2, \dots, -c^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori è uguale ad 1 e gli altri sono uguali a $-c^2$. Quindi l'equazione delle onde è di tipo iperbolico normale.

(I.5): Si ha $A(x) = \text{diag}(0, -a^2, \dots, -a^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori si annulla e gli altri sono uguali a $-a^2$. Quindi l'equazione del calore è di tipo parabolico normale.

Osserviamo che in principio la classificazione della (I.1) dipende dalla scelta del punto $x \in G$. Per molte equazioni importanti della fisica matematica il segno degli autovalori (spesso gli autovalori stessi) e dunque la classificazione non dipende da $x \in G$ (tranne in qualche punto eccezionale, spesso di frontiera). Un'eccezione notevole è l'equazione di *Tricomi*

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{I.8})$$

dove $(x, y) \in G = \mathbb{R}^2$. In tal caso $A(x, y) = \text{diag}(y, 1)$, $\lambda_1(x, y) = y$ e $\lambda_2(x, y) = 1$. Quindi la (I.8) è ellittica se $y > 0$, parabolica se $y = 0$ e iperbolica se $y < 0$.

2 Coordinate ortogonali

Partendo dalle coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$, sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione delle variabili in \mathbb{R}^3 , dove $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$ ($j = 1, 2, 3$) sono funzioni di classe C^2 e la matrice Jacobiana è invertibile (per x in un aperto di \mathbb{R}^3). Derivando le variabili x_1, x_2, x_3 rispetto alle nuove variabili u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j.$$

Quindi la distanza al quadrato tra due punti vicini tra loro è

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du_i du_j,$$

dove

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}$$

è la cosiddetta metrica. La trasformazione si dice *ortogonale* se la metrica $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^3$ è una matrice diagonale, cioè se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \quad k \neq l.$$

In tal caso

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i du_i)^2,$$

dove

$$h_k = \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Si vede facilmente che la matrice $\text{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Per ogni punto (u_1, u_2, u_3) delle nuove coordinate per cui $\det J \neq 0$, passano tre superfici $u_i = \text{costante}$ ($i = 1, 2, 3$). In questo punto definiamo il vettore \mathbf{e}_i di lunghezza 1 normale alla superficie $u_i = \text{costante}$ e nella direzione in cui cresce u_i . In tal caso i tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ formano un sistema di coordinate cartesiane tale che $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) > 0$.

Il gradiente di ψ ha la forma

$$\nabla \psi = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \mathbf{e}_j,$$

la divergenza della funzione $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3$ a valori vettoriali ha la forma

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (V_3 h_1 h_2) \right],$$

e il rotore di \mathbf{V} ha la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left(\frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (h_2 V_2)}{\partial u_3} \right) h_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_2 \mathbf{e}_2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_3 \mathbf{e}_3 \right]. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore di Laplace, oppure il Laplaciano,

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

ha la seguente rappresentazione:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

Esempio I.1 Introduciamo ora alcuni sistemi di coordinate ortogonali.

- a. **Coordinate Cilindriche:** $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.9})$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r, \theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in **coordinate polari**:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (\text{I.10})$$

- b. **Coordinate Sferiche:** $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, dove $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r \sin \varphi$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right). \quad (\text{I.11})$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos \varphi \in [-1, 1]$ (tale che $d\xi = -\sin \varphi d\varphi$, $1 - \xi^2 = \sin^2 \varphi$) otteniamo²

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 (1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right). \quad (\text{I.12})$$

- c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [8]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.13})$$

²Usando le coordinate ortogonali (r, θ, ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_r = 1$, $h_\theta = r\sqrt{1 - \xi^2}$ e $h_\xi = (r/\sqrt{1 - \xi^2})$.

d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [8]): $x = c \cosh u \cos v$, $y = c \sinh u \sin v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$\begin{cases} h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \\ h_z = 1. \end{cases}$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.14})$$

3 Separazione delle variabili

1. Separazione in Coordinate Cartesiane. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in tre variabili (x, y, z) per $k \geq 0$ nel dominio $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. Ponendo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

dove $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ sono di classe C^2 , si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2.$$

In tal caso esistono tre costanti k_x^2 , k_y^2 e k_z^2 tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k_x^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_y^2 = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_z^2 = 0,$$

dove

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L \right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione I.2 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2 , non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -C, \quad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \text{sen } m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $C \geq 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} C \int_0^{2\pi} |\Theta(\theta)|^2 d\theta &= - \int_0^{2\pi} \Theta''(\theta) \overline{\Theta(\theta)} d\theta \\ &= - \left[\Theta'(\theta) \overline{\Theta(\theta)} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

poichè il primo termine della seconda parte si annulla per motivi di periodicità e $\Theta'(\theta) \not\equiv 0$. Quindi $C \geq 0$.

D'altra parte, per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \text{sen}(\theta\sqrt{-C})$$

dell'equazione $\Theta'' = -C\Theta$. Risulta il sistema di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) & -\operatorname{sen}(2\pi\sqrt{C}) \\ \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{C}) & 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie.

Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. \square

Sostituendo $\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \dots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \rightarrow 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m .

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) \right] + k^2 - V(r).$$

Quindi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) = -CS(\theta, \varphi)$$

e

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2} \right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per certi valori della costante C . Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + C = 0.$$

Come di solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos \xi)$, $\xi = \cos \varphi$ arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione si chiama l'equazione per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \rightarrow \pm 1$ esistono soltanto per $C = l(l + 1)$

dove $l = m, m+1, m+2, \dots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + l(l+1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C = l(l+1)$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r),$$

dove $m = -l, -l+1, \dots, l-2, l-1, l$.

4. Separazione in Coordinate Parabolico-Cilindriche. L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.13). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2 c^2 u^2)U(u) &= 0, \\ V''(v) - (\mu + \lambda^2 c^2 v^2)V(v) &= 0, \end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) &= 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \tag{I.15}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \tag{I.16}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{I.17}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (I.17) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (I.15) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

4 Equazione di Helmholtz

In questa parte vengono calcolati gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni normalizzate dell'equazione di Helmholtz in dominio abbastanza semplici.

4.1 Equazione di Helmholtz sull'Intervallo

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$u'' + k^2 u = 0, \quad 0 < x < L, \quad (\text{I.18})$$

con una delle seguenti condizioni al contorno:

$$u(0) = u(L) = 0, \quad \text{Dirichlet} \quad (\text{I.19})$$

$$u'(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Neumann} \quad (\text{I.20})$$

$$u(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Dirichlet a sinistra, Neumann a destra} \quad (\text{I.21})$$

$$u'(0) = u(L) = 0, \quad \text{Neumann a sinistra, Dirichlet a destra} \quad (\text{I.22})$$

$$u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L), \quad \text{condizioni periodiche} \quad (\text{I.23})$$

$$u(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{I.24})$$

$$(\cos \beta)u(0) - (\sin \beta)u'(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{I.25})$$

dove $0 \leq \alpha \leq (\pi/2)$ e $0 \leq \beta \leq (\pi/2)$. Le condizioni nelle (I.24) e (I.25) si chiamano miste. In tutti i casi determineremo gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno. In tutti i casi gli autovalori k^2 sono positivi, tranne nel caso delle condizioni di Neumann (I.20) dove uno degli autovalori si annulla.

a. Condizioni di Dirichlet. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.26})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

b. Condizioni di Neumann. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos(n\pi x/L)$ per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, & \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

c. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e di Neumann in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = \left((n - \frac{1}{2})\pi/L\right)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin\left((n - \frac{1}{2})\pi x/L\right)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.28})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

d. Condizione di Neumann in $x = 0$ e di Dirichlet in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = \left((n - \frac{1}{2})\pi/L\right)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos\left((n - \frac{1}{2})\pi x/L\right)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.29})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno molteplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e mista in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos \alpha \sin(kL) + k \sin \alpha \cos(kL) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha = 0$ [Dirichlet] e $\alpha = (\pi/2)$ [Dirichlet in $x = 0$ e Neumann in $x = L$], risultano $k > 0$, $\sin(kL) = 0$ e $\cos(kL) \neq 0$. Arriviamo all'equazione trascendentale

$$\tan(kL) = -k \tan \alpha, \quad (\text{I.31})$$

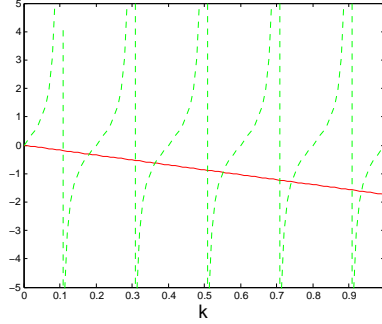


Figura I.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan \alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

dove $\tan \alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k \tan \alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta = 0, \quad (\text{I.32})$$

$$c_1 [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] + c_2 \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] = 0. \quad (\text{I.33})$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned} & \cos \beta \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] \\ & + \sin \beta [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] = 0, \end{aligned}$$

oppure

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(kL) = - \left[\frac{\cos \alpha \cos \beta}{k} - k \sin \alpha \sin \beta \right] \sin(kL).$$

Si cerchino i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e quello della funzione razionale

$$k \mapsto - \frac{k \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta - k^2 \sin \alpha \sin \beta}.$$

4.2 Equazione di Helmholtz sul Rettangolo

Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x, y) = 0, \quad (\text{I.34})$$

dove $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ e vengono imposte le seguenti condizioni di Dirichlet:

$$u(x, y) = 0, \quad x = 0, L_1 \text{ oppure } y = 0, L_2. \quad (\text{I.35})$$

Separando le variabili, cioè ponendo

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

e dividendo la (I.34) da $X(x)Y(y)$ otteniamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0.$$

Quindi esistono costanti k_x^2 e k_y^2 tali che

$$\begin{cases} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L_1) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

$$\begin{cases} Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (\text{I.38})$$

Quindi i problemi al contorno nelle variabili x e y sono ambedue problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz in una variabili con le condizioni di Dirichlet. Quindi i loro autovalori e le loro autofunzioni normalizzate sono

$$(k_x^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \quad (\text{I.39})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, e

$$(k_y^2)_m = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2, \quad \varphi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{I.40})$$

dove $m = 1, 2, 3, \dots$. Di conseguenza, gli autovalori e autofunzioni normalizzate del problema bidimensionale sono

$$(k^2)_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2}\right), \quad \varphi_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{I.41})$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale in $L^2((0, L_1) \times (0, L_2))$.

Se tutte le 4 parti del bordo, $\{0\} \times [0, L_2]$, $\{L_1\} \times [0, L_2]$, $[0, L_1] \times \{0\}$ e $[0, L_1] \times \{L_2\}$, si possono imporre diverse condizioni al contorno, quali le condizioni di Dirichlet, quelle di Neumann e quelle miste. In tutti questi casi si possono separare le variabili e risolvere i problemi al contorno unidimensionali che ne risultano.

L'equazioni di Helmholtz si può risolvere per separazione delle variabili anche nei parallelepipedi multidimensionali in dimensione ≥ 3 . Per esempio, in tre dimensioni, nel dominio $(0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, e sotto le condizioni di Dirichlet escono gli autovalori e autofunzioni

$$(k^2)_{n,m,l} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{l^2}{L_3^2}\right),$$

$$\varphi_{n,m,l}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L_3}\right),$$

dove $n, m, l = 1, 2, 3, \dots$

5 Equazioni delle onde e del calore

Discutiamo ora alcuni casi in cui è abbastanza facile calcolare esplicitamente le soluzioni delle equazioni del calore e delle onde.

5.1 Equazioni delle onde e del calore sull'intervallo

Consideriamo ora l'equazione del calore per $x \in (0, L)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{I.42})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{I.43})$$

dove a^2 è la diffusività termica,³ e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{I.44})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{I.45})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (\text{I.46})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imponremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (\text{I.47})$$

Al posto delle condizioni di Dirichlet si possono imporre quelle di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (\text{I.48})$$

Nell'ambito dell'equazione del calore le condizioni (I.48) si chiamano condizioni di isolamento, poichè non può attraversare la frontiera alcun calore.

In ambedue i casi facciamo una separazione delle variabili di tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

e dividiamo la (I.42) e la (I.45) da $X(x)T(t)$. Otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione del calore,} \\ c^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione delle onde,} \end{cases}$$

³Infatti $a^2 = K/(\mu\rho)$, dove K è la conduttività termica, μ è il calore specifico e ρ è la densità del mezzo. In generale vale l'equazione $\mu\rho(\partial u/\partial t) = K\Delta u + \nabla \vec{K} \cdot \nabla u$.

con le condizioni di Dirichlet

$$X(0) = X(L) = 0.$$

La separazione delle variabili conduce al problema di contorno

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

più il problema in variabile temporale

$$\begin{cases} T'(t) = -a^2 k^2 T(t), & \text{equazione del calore,} \\ T''(t) = \frac{k^2}{c^2} T(t), & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Quindi la soluzione della (I.49) ha la forma

$$(k^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.51})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, mentre la soluzione dei problemi temporali ha la forma

$$\begin{cases} T(t) = T(0) \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right), & \text{equazione del calore,} \\ T(t) = T(0) \cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + T'(0) \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi t/cL}, & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

La soluzione generale della equazione del calore o delle onde è una combinazione lineare (facendo scorrere $n = 1, 2, 3, \dots$) delle soluzioni elementari $X_n(x)T_n(t)$. Quindi la soluzione generale dell'equazione del calore ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.53})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{I.54})$$

Il coefficiente di Fourier c_n viene calcolato nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

D'altra parte, la soluzione generale dell'equazione delle onde ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi t/cL} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.55})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.56})$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{I.57})$$

I coefficienti di Fourier si calcolano nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Se invece della (I.47) vengono imposte le condizioni di Neumann, i dettagli della derivazione della soluzione non cambiano molto.

5.2 Equazioni delle onde e del calore sul rettangolo

La risoluzione delle equazioni del calore e delle onde sul rettangolo è analoga a quella per i corrispondenti problemi unidimensionali. Al posto degli autovalori e autofunzioni dell'equazione di Helmholtz sull'intervallo si utilizzano ora quelli dell'equazione di Helmholtz sul rettangolo.

Consideriamo ora l'equazione del calore per $(x, y) \in (0, L_1) \times (0, L_2)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{I.58})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{I.59})$$

dove a^2 è la diffusività termica, e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{I.60})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{I.61})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (\text{I.62})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imponremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(L_1, y, t) = 0, & y \in [0, L_2], \\ u(x, 0, t) = u(x, L_2, t) = 0, & x \in [0, L_1]. \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

La separazione delle variabili

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

e la divisione dall'espressione $X(x)Y(y)T(t)$ conducono al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.64})$$

per l'equazione del calore e al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

per l'equazione delle onde. Otteniamo, come al solito,

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0, & X(0) &= X(L_1) = 0, \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0, & Y(0) &= Y(L_2) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} (k_x)^2 &= \left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2, & X(x) &\sim \sin \frac{n\pi x}{L_1}, \\ (k_y)^2 &= \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2, & Y(y) &\sim \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \end{aligned}$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Inoltre,

$$T(t) = T(0) \exp \left(-a^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t \right)$$

per l'equazione del calore e

$$T(t) = T(0) \cos \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ + T'(0) \frac{\sin \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{\frac{1}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

per l'equazione delle onde.

Per l'equazione del calore arriviamo alla seguente soluzione completa:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \exp \left(-a \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.66})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \quad (\text{I.67})$$

e

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{I.68})$$

Infine l'equazione delle onde ha la seguente soluzione:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[c_{n,m} \cos \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right. \\ \left. + d_{n,m} \frac{\sin \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{\frac{1}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right], \quad (\text{I.69})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.70})$$

$$u_1(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} d_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.71})$$

e

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx, \quad (\text{I.72})$$

$$d_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_1(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{I.73})$$

Capitolo II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI

1 Richiami sulle Equazioni Differenziali di Secondo Specie

Consideriamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I, \quad (\text{II.1})$$

dove a_0 , a_1 e g sono funzioni reali continue di $x \in I$, essendo I un intervallo aperto della retta reale. Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni coppia di numeri $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ esiste una soluzione unica della (II.1) tale che

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (\text{II.2})$$

Ponendo y_p per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (II.1) che soddisfa alle condizioni $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$, la soluzione del problema a valori iniziali (II.1)-(II.2) è

$$y(x) = y_0 Y_0(x) + y_1 Y_1(x) + y_p(x), \quad (\text{II.3})$$

dove Y_0 e Y_1 sono le soluzioni della corrispondente equazione omogenea (cioè, della (II.1) con $g \equiv 0$) tali che

$$Y_0(x_0) = 1, \quad Y_0'(x_0) = 0, \quad (\text{II.4})$$

$$Y_1(x_0) = 0, \quad Y_1'(x_0) = 1. \quad (\text{II.5})$$

Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea costituiscono uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Siccome la mappa $(y_0, y_1) \mapsto y$, con y la soluzione dell'equazione omogenea che soddisfa la (II.2), è una corrispondenza biunivoca lineare tra \mathbb{R}^2 e lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea, si vede subito che due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione omogenea sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i loro vettori colonna dei dati iniziali $(y_j(x_0), y'_j(x_0))^T$ ($j = 1, 2$), cioè se e solo se il loro *Wronskiano*

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{II.6})$$

La matrice 2×2 nella (II.6) si dice *matrice Wronskiana*. Siccome la trasformazione lineare dai dati iniziali delle soluzioni della equazione omogenea in x_0 ai dati iniziali in un altro punto $\hat{x}_0 \in I$ è per forza una corrispondenti biunivoca, segue che il Wronskiano $w(x)$ si annulla da nessuna parte oppure si annulla dappertutto in I . Quest'ultima proprietà si dimostra anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx}(y_1 y'_2 - y_2 y'_1) = y_1 y''_2 - y_2 y''_1 \\ &= y_1 (-a_1 y'_2 - a_0 y_2) - y_2 (-a_1 y'_1 - a_0 y_1) \\ &= -a_1 (y_1 y'_2 - y_2 y'_1) = -a_1 w. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Quindi, $w(x) = \text{cost} \exp(-A_1(x))$, essendo A_1 una primitiva della funzione coefficiente a_1 . Di conseguenza, $w(x) = 0$ se e solo se si annulla la costante se e solo se $w(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Per risolvere l'equazione non omogenea (II.1) conoscendo due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 della corrispondente equazione omogenea, si utilizzi il *metodo della variazione dei parametri*. Ponendo

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (\text{II.8})$$

e facendo l'ipotesi che $c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0$ per ogni $x \in I$, si arriva al seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.9})$$

Essendo $w(x) \neq 0$ (per ogni $x \in I$) il determinante del sistema lineare (II.9), risulta la soluzione

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(x)} \begin{pmatrix} y'_2(x) & -y_2(x) \\ -y'_1(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} = \frac{g(x)}{w(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.10})$$

da cui si trovano $c_1(x)$ e $c_2(x)$ (e dunque la soluzione y) integrando.

2 Metodo di Frobenius

L'equazione differenziale ordinaria

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (\text{II.11})$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ e quindi ammettono uno sviluppo in potenze di x con raggio di convergenza strettamente positiva, può essere risolta sostituendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Risulta una relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n che ci consente a calcolare c_2, c_3, c_4, \dots in modo unico dai coefficienti iniziali $c_0 = y(0)$ e $c_1 = y'(0)$. Inoltre, il raggio di convergenza della serie di potenze per la $y(x)$ non è inferiore al minimo dei raggi di convergenze delle serie di potenze per $P(x)$ e $Q(x)$. Siccome $y(0)$ e $y'(0)$ determinano completamente la soluzione y , si trovano in tal modo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (II.11).

Esempio II.1 Il metodo di risoluzione sostituendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ viene illustrato dall'equazione di Airy

$$y'' = xy.$$

Siccome $y''(0) = 0$, abbiamo $c_2 = 0$. Quindi $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1}$ e $xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ implicano

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

e quindi si arriva alla relazione di ricorrenza

$$(n+2)(n+3)c_{n+3} = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

partendo da $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$ e $c_2 = 0$. Quindi

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3k-1)(3k)}, \quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3k)(3k+1)},$$

e $c_2 = c_5 = c_8 = \dots = 0$. Di conseguenza

$$y(x) = y(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1)(3k)} + y'(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k)(3k+1)},$$

dove ambedue le serie hanno raggio di convergenza $+\infty$.

Il **metodo di Frobenius** (1877) è stato sviluppato per risolvere certe equazioni differenziali ordinarie con coefficienti singolari utilizzando lo sviluppo della soluzione in serie di potenza. In tal caso l'equazione differenziale ha la forma (II.11), dove $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(x)/x$ e $q(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x)/x^2$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$. Si dice che $x = 0$ è una *singolarità regolare* [inglese: regular singularity] dell'equazione.

Consideriamo prima l'esempio più elementare di un'equazione differenziale con singolarità regolare ad $x = 0$, la cosiddetta *equazione di Eulero*

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0, \quad (\text{II.12})$$

dove p e q sono coefficienti costanti. Per $(\pm x) > 0$ sostituiamo $x = \pm e^t$, dove $t \in \mathbb{R}$, e arriviamo all'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = 0. \quad (\text{II.13})$$

La sua equazione caratteristica, detta *equazione indiciale*, è

$$\alpha(\alpha-1) + p\alpha + q = 0. \quad (\text{II.14})$$

Ci sono tre possibilità:

- a. Discriminante = $(p-1)^2 - 4q > 0$. L'equazione indiciale (II.14) ha due radici reali diverse α_1 e α_2 . In tal caso la soluzione della (II.12) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} = c_1 |x|^{\alpha_1} + c_2 |x|^{\alpha_2}.$$

- b. Discriminante = $(p-1)^2 - 4q = 0$. L'equazione indiciale (II.14) ha una singola radice reale α doppia. In tal caso la soluzione della (II.12) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} = c_1 |x|^\alpha + c_2 |x|^\alpha \ln |x|.$$

- c. Discriminante = $(p-1)^2 - 4q < 0$. L'equazione indiciale (II.14) ha due radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$ dove σ e τ sono reali. In tal caso la soluzione della (II.12) è

$$y(x) = e^{\sigma t} [c_1 \cos(\tau t) + c_2 \sin(\tau t)] = |x|^\sigma [c_1 \cos(\tau \ln |x|) + c_2 \sin(\tau \ln |x|)].$$

Spieghiamo ora il *Metodo di Frobenius* (1877). Si cerchi la generalizzazione della risoluzione dell'equazione di Eulero alle equazioni differenziali

$$x^2 y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (\text{II.15})$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ nel piano complesso. Ciò vuol dire che

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (\text{II.16})$$

dove ambedue serie di potenze hanno un raggio di convergenza strettamente positiva. Sostituiamo ora nella (II.15)

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{II.17})$$

dove, per ipotesi, la serie ha un raggio di convergenza $R > 0$.¹ Allora

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n x^{n+\alpha}, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{II.18})$$

dove abbiamo calcolato le derivate termine a termine. Sostituendo la (II.17) e la (II.18) nella (II.15) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j \right] x^{n+\alpha} = 0.$$

Quindi tutti i coefficienti di questa serie si devono annullare:

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.19})$$

In particolare, abbiamo trovate la cosiddetta *equazione indiciale*

$$\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha - 1) + p_0 \alpha + q_0 = 0. \quad (\text{II.20})$$

Affinchè $c_0 \neq 0$, α deve essere una radice della (II.19).

Teorema II.2 *Supponiamo che l'equazione indiciale (II.19) ha due zeri diversi con una differenza non intera. Allora, scegliendo per α uno degli zeri, si ottengono due soluzioni linearmente indipendenti della (II.15) per $|x|$ inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenza (II.16).*

¹Si può dimostrare che il raggio di convergenza di questa serie di potenze non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze nella (II.16).

Se l'equazione indiciale ha un singolo zero $\alpha \in \mathbb{R}$, allora la (II.17) conduce ad una singola soluzione linearmente indipendente della (II.15). Per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si calcolino i coefficienti $c_n(\alpha)$ dal coefficiente c_0 utilizzando la (II.19) e inserendo α come fosse un parametro libero. La seconda soluzione linearmente indipendente ora ha la seguente forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) x^{n+\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0}, \quad (\text{II.21})$$

dove α_0 è il singolo zeri dell'equazione indiciale.

Se l'equazione indiciale ha due zeri reali con differenza intera, α_0 e $\alpha_0 - N$ per un opportuno $N \in \mathbb{N}$, allora la situazione è abbastanza complicata, poichè in alcuni casi si trovano due soluzioni linearmente indipendenti e negli altri casi due soluzioni proporzionali. Scriviamo ora la (II.19) nella seguente forma

$$\begin{cases} \Lambda(\alpha)c_0 = 0, \\ \Lambda(\alpha + n)c_n + \sum_{j=0}^{n-1} [p_{n-j}(j + \alpha) + q_{n-j}] c_j = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Sostituendo $\alpha = \alpha_0$, essendo α_0 lo zero maggiore, si vede subito che si possono trovare tutti i coefficienti c_n dal coefficiente c_0 in modo unico. D'altra parte, sostituendo $\alpha = \alpha_0 - N$, essendo $\alpha_0 - N$ lo zero minore, si vede subito che si possono calcolare in modo unico i coefficienti $c_1, \dots, c_2, \dots, c_{N-1}$ dal coefficiente c_0 . Purtroppo, siccome $\Lambda((\alpha_0 - N) + N) = 0$, per $n = N$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (II.22) si reduce all'equazione

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}] c_j = 0, \quad (\text{II.23})$$

dove c_1, \dots, c_{N-1} seguono in modo unico dal coefficiente c_0 . In altre parole: $c_s = c_s(\text{se } c_0 = 1)c_0$ per $s = 1, \dots, N - 1$. Ci sono ora due possibilità.

Prima: Se

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}] c_j(\text{se } c_0 = 1) \neq 0,$$

allora dobbiamo per forza scegliere $c_0 = 0$. In tal caso $c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$. Scegliamo ora un coefficiente c_N . Allora la (II.19) per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ ci consentono a calcolare c_{N+1}, c_{N+2}, \dots da c_N in modo unico. Ponendo $d_n = c_{N+n}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e $n = N + m$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, la (II.19) ha la forma

$$(m + \alpha_0)(m + \alpha_0 - 1)d_m + \sum_{l=0}^m p_{m-l}(l + \alpha_0)d_l + \sum_{l=0}^m q_{m-l}d_l = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.24})$$

e quindi per $\alpha = \alpha_0 - N$ si otterrà una soluzione proporzionale a quella ottenuta per $\alpha = \alpha_0$.

Seconda: Se

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}] c_j (\text{se } c_0 = 1) = 0,$$

allora l'equazione per c_N è infatti la tautologia $0 = 0$, mentre per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (II.19) conduce a valori per i coefficienti c_{N+1}, c_{N+2}, \dots che dipendono in modo unico e lineare dai coefficienti c_0 e c_N . Quindi si otterranno due soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio II.3 Consideriamo l'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

di ordine $\nu \geq 0$, dove $p(x) \equiv 1$ e $q(x) = x^2 - \nu^2$. Quindi $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$ e $q_2 = 1$, e l'equazione indiciale

$$\Lambda(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = \alpha^2 - \nu^2 = 0$$

ha gli zeri $\pm\nu$. Di conseguenza, se 2ν non è un intero, il metodo di Frobenius conduce a due soluzioni linearmente indipendenti. Supponiamo ora che $0 \neq 2\nu \in \mathbb{Z}$. Allora la (II.22) implica

$$\begin{cases} \Lambda(-\nu + 1)c_1 = 0, \\ \Lambda(-\nu + n)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

dove $0 \notin \{\Lambda(-\nu + n) : n = 1, 2, \dots, 2\nu - 1\} \cup \{\Lambda(-\nu + n) : n \geq 2\nu + 1\}$. È facile capire che per 2ν dispari si trovano due soluzioni linearmente indipendenti, mentre per 2ν si trova una singola soluzione linearmente indipendente. Infatti, se 2ν è pari, per $n = 2\nu$ si trova $c_{2\nu-2} = 0$; utilizzando la (II.25) per $n = 2, 4, \dots, 2\nu - 2$ pari, otteniamo $0 = c_{2\nu-2} = c_{2\nu-4} = \dots = c_2 = c_0$, mentre la (II.25) per $n = 1, 3, \dots, 2\nu - 1$ conduce a $0 = c_1 = c_3 = \dots = c_{2\nu-1} = 0$. Per 2ν dispari, lo stesso ragionamento conduce a $c_1 = c_3 = \dots, c_{2\nu} = \dots = 0$ direttamente.

Esempio II.4 Consideriamo ora l'equazione differenziale di Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

dove $x = \pm 1$ sono singolarità regolari. Limitandoci al caso $x = 1$ e utilizzando $-2x/(1 - x^2) = (2x/(x + 1))/(x - 1)$ e $n(n + 1) = [n(n + 1)(x - 1)]/(x - 1)^2$,

abbiamo $p_0 = 0$, $p_j = (-1)^{j-1}/2^{j-1}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), $q_0 = -q_1 = -n(n+1)$ e $q_j = 0$ per $j \geq 2$. Dunque l'equazione indiciale è

$$\Lambda = \alpha(\alpha - 1) - n(n + 1) = (\alpha - n - 1)(\alpha + n).$$

Quindi per $n = 0, 1, 2, \dots$ la differenza tra gli zeri è uguale a $2n + 1$, un intero diverso da zero. Un'ulteriore analisi dimostra che risulta una singola soluzione linearmente indipendente.

3 Funzioni Ipergeometriche

Le funzioni ipergeometriche costituiscono una famiglia di funzioni che includono la maggior parte delle funzioni speciali (infatti tutte tranne le funzioni gamma introdotto nell'Appendice A). Queste funzioni vengono normalmente introdotte nel seguente modo:²

(II.26)

dove il *simbolo di Pochhammer* $\alpha_0 = 1$ e

$$(\alpha)_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k + 1) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Consideriamo ora la *funzione ipergeometrica*

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k \quad (\text{II.27})$$

per $|z|$ abbastanza piccola. Ovviamente si ha la relazione di simmetria

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; z)$$

per $|z|$ abbastanza piccola. Ovviamente

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1, \quad \left[\frac{d}{dz} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \right]_{z=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}. \quad (\text{II.28})$$

α	β	γ	z	${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$
α	β	β	z	$(1 - z)^{-\alpha}$
1	1	2	z	$-\log(1 - z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	z^2	$\frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	z^2	$\arcsin(z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\arctan(z)/z$

²Per la funzione gamma si vede l'appendice A.

Sostituendo la (II.28) nella (II.27) otteniamo

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+k-1} dt \\
&= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (zt)^k \right\} dt \\
&= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt,
\end{aligned}$$

valida per $|z| < 1$ e $\gamma > \beta > 0$. Sostituendo $z = 1$ si ottiene

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{1}{B(\gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} t^{\beta-1} dt = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)}$$

per $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$. Esprimendo le funzioni beta di Eulero in funzioni gamma (vedi l'Appendice A) otteniamo il *teorema di Gauss*

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (\text{II.29})$$

Per trovare un'espressione integrale per le funzioni ipergeometriche si ricorda prima che

$$\begin{aligned}
\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} &= \frac{\Gamma(\beta + k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma + k)} = \frac{B(\beta + k, \gamma - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)} \\
&= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+k-1} dt.
\end{aligned}$$

Sostituendolo nella (II.27) otteniamo

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)_k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+k-1} dt \\
&= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (zt)^k \right\} dt \\
&= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt.
\end{aligned}$$

Sostituendo $z = 1$ otteniamo

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

dove $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$.

La funzione ipergeometrica ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ soddisfa all'equazione differenziale ipergeometrica

$$x(1-x)y''(x) + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}y'(x) - \alpha\beta y = 0. \quad (\text{II.30})$$

Tutti i punti $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ sono punti regolari della (II.29) (cioè, esistono due soluzioni linearmente indipendenti in un intorno di ciascuno di questi punti), mentre 0, 1 e ∞ sono singolarità regolari.

Intorno a $x = 0$ la (II.30) ha la forma

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0.$$

Quindi l'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0,$$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = 1$ l'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + (\alpha + \beta - \gamma + 1)\mu = \mu(\mu + \alpha + \beta - \gamma) = 0,$$

con gli zeri 0 e $\gamma - \alpha - \beta$. Quindi la sostituzione $y(x) = (x-1)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k$ per $\mu \in \{0, \gamma - \alpha - \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x-1| < 1$ se $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = \infty$ possiamo trasformare la (II.30) ponendo $z = 1/x$ e considerando $z = 0$ come singolarità regolare. Si ottiene l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z}\right) z^2 \frac{d}{dz} (z^2 y'(z)) - \left[\gamma - \frac{\alpha + \beta + 1}{z}\right] z^2 \frac{dy}{dz} - \alpha\beta y(z) \\ & = z^2(z-1)y''(z) - z[2(1-z) + \gamma z - \alpha - \beta - 1]y'(z) - \alpha\beta y(z) = 0. \end{aligned}$$

L'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + \mu(1 - \alpha - \beta) + \alpha\beta = (\mu - \alpha)(\mu - \beta) = 0.$$

Quindi la sostituzione $y(x) = x^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}$ per $\mu \in \{\alpha, \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| > 1$ se $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

L'informazione sulle singolarità regolari si può esprimere tramite la *funzione P di Riemann*:

$$y(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 - \gamma & \beta & \gamma - \alpha - \beta \end{array} \quad x \right\}.$$

Per passare all'equazione ipergeometrica conflente osserviamo prima che la funzione ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ \gamma - \left(1 + \frac{\alpha + 1}{\beta}\right) x \right\} \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0. \quad (\text{II.31})$$

Facciando tendere $\beta \rightarrow \infty$ si arriva alla cosiddetta *equazione ipergeometrica conflente*

$$xy''(x) + (\gamma - x)y'(x) - \alpha y = 0. \quad (\text{II.32})$$

Siccome $(\beta)_k/\beta_k \rightarrow 1$ se $\beta \rightarrow \infty$ per k fissa, otteniamo come una delle soluzioni la *funzione ipergeometrica conflente*

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} x^k. \quad (\text{II.33})$$

α	γ	z	${}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$
α	α	z	e^z
$\alpha + 1$	α	z	$\left(1 + \frac{\alpha}{z}\right) e^z$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2z} \operatorname{erf}(z)$

Tutti i punti in $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ sono regolari, mentre zero e ∞ sono singolarità regolari della (II.31). Infatti, intorno ad $x = 0$ si ottiene l'equazione indiciale

$$\mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0,$$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Il punto all'infinito non è una singolarità regolare.

4 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \quad (\text{II.34})$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (II.34) non soddisfano le condizioni del paragrafo precedente.

4.1 Definizione e proprietà semplici

Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione³

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{II.35})$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma che soddisfa $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [vedi l'Appendice A]. Si può rappresentare nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (\text{II.36})$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica su tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)}, \quad (\text{II.37})$$

con raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ su tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (II.34). Utilizzando la relazione $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned} & x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k + \nu)(2k + \nu - 1) + (2k + \nu) - \nu^2]}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x), \end{aligned}$$

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine ν* , dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

³La (II.35) si può anche derivare applicando il metodo di Frobenius.

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (II.35) in virtù del fatto che

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \quad (\text{II.39})$$

poichè $\Gamma(\nu + 1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (\text{II.40})$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. L'uguaglianza (II.40) segue dal fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \dots$ [vedi l'Appendice A] e quindi la sommatoria nella serie (II.35) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$.

Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (\text{II.41})$$

Infatti, la prima formula (II.41) segue dalla (II.35):

$$\begin{aligned} & J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k + \nu)}{2\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

In modo analogo si stabilisce la seconda formula (II.41).

Le formule (II.41) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In particolare per $\nu = 0$ si trova

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Infine, sottraendo le formule (II.41), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

4.2 Funzioni di Bessel di seconda specie

Il Wronskiano $W[u, v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$W'[u, v](x) + \frac{1}{x}W[u, v](x) = 0,$$

e quindi $W[u, v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \rightarrow 0$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_{-\nu}(x) = \frac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque [vedi l'Appendice A]

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + O(x) \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ci dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovare una soluzione linearmente indipendente da $J_\nu(x)$ per $\nu \in \mathbb{Z}$, definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo per $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \left[\log \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \psi(k+1), \\
Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[2 \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)].
\end{aligned}$$

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per $x \rightarrow 0^+$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

implicando che $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0$.

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel di prima specie. In particolare

$$Y_\nu'(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y_0'(x) = -Y_1(x);$$

$$Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

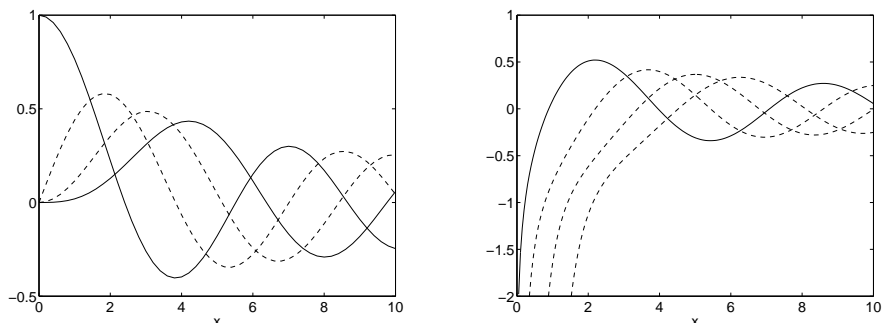


Figura II.1: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.
 Pannello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

4.3 Ortogonalità e zeri

Proposizione II.5 Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (\text{II.43})$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2, \\ -\frac{1}{2} J'_\nu(\mu_1) J'_\nu(-\mu_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1) J_\nu(-\mu_1), & \mu_1 = -\mu_2. \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (II.34), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$

e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned} & x [\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)]_{x=0}^1 \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] \right\} dx \\ &= (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Dalla (II.35) [vedi anche la (II.39)] abbiamo per $x \rightarrow 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (II.45) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \quad (\text{II.46})$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (II.43) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (II.46) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (II.46)).

Per dimostrare la (II.44) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ nella (II.46) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2 dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (II.44) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. \square

Dimostriamo ora le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (II.43) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema II.6 *Gli zeri dell'equazione (II.43) per $\nu > -1$ sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello 0; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (II.35), in virtù del fatto che α , β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\bar{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (II.43), $\bar{\mu}$ è anche esso uno zero. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (II.44) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (II.35) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$, si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i \beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu} [\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu)]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (II.43) di molteplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0} \right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

in virtù dell'equazione (II.34). Dalla (II.47) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (II.34), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (II.34). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (II.47) si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1 \right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (II.44), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_0 x)^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(\mu_0)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_0^2} \right) J_\nu(\mu_0)^2 \right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. □

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (II.43), disponendole in ordine crescente:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \dots$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Senza dimostrazione poniamo l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.48})$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \nu + k\pi, \quad k \rightarrow +\infty.$$

4.4 Altre funzioni cilindriche

Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann o le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x).$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie (modified Bessel functions of the first kind), mentre le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di MacDonald.⁴

Utilizzando l'espressione asintotica (II.48) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.49})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.50})$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.51})$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (\text{II.52})$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (\text{II.53})$$

⁴La nomenclatura non è uniforme. Nella letteratura ci sono diversi nomi e notazioni per queste funzioni.

Analogamente, utilizzando la (II.39), si ottiene per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

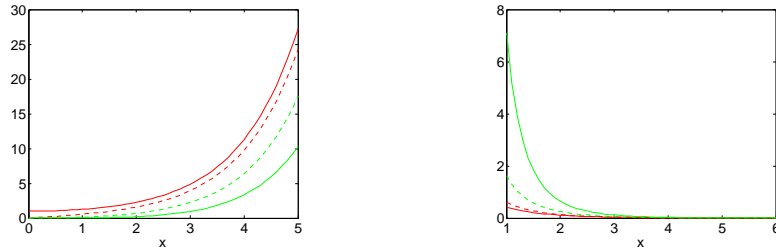


Figura II.2: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$. Pannello destro: le funzioni di MacDonald $K_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (II.34), otteniamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u = 0. \quad (\text{II.54})$$

Dal Teorema II.6 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

4.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$, dove $l = 0, 1, 2, \dots$, appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono

introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{II.55})$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{II.56})$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z), \quad (\text{II.57})$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z). \quad (\text{II.58})$$

Le funzioni $j_l(z)$, $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$ e $h_l^{(1,2)}(z)$ si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin(z)}{z}, \\ j_1(z) &= \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z}, \\ j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin(z) - \frac{3}{z^2} \cos(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0(z) &= -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}, \\ y_1(z) &= n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z}, \\ y_2(z) &= -n_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cos(z) - \frac{3}{z^2} \sin(z). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z). \quad (\text{II.59})$$

È anche abbastanza facile trovare le seguenti espressioni esplicite:

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin(z)}{z}, \quad y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos(z)}{z}. \quad (\text{II.60})$$

Asintoticamente (se $x \rightarrow +\infty$) abbiamo le seguenti espressioni:

$$j_l(x) = \begin{cases} (-1)^{l/2} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

$$y_l(x) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \begin{cases} (-1)^{(l+2)/2} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

$$h_l^{(1)}(x) = \begin{cases} -i(-1)^{l/2} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

$$h_l^{(2)}(x) = \begin{cases} i(-1)^{l/2} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ dispari.} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Sostituendo $y = \sqrt{x} Y$ nell'equazione di Bessel di ordine $\nu = l + \frac{1}{2}$ si arriva all'equazione differenziale

$$Y'' + \frac{2}{x} Y' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) Y = 0 \quad (\text{II.65})$$

per le funzioni j_l , $y_l = (-1)^{l+1} n_l$, $h_l^{(1)}$ e $h_l^{(2)}$. Ponendo $Y = Z/x$ si ha inoltre

$$Z'' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) Z = 0 \quad (\text{II.66})$$

per le funzioni $xj_l(x)$, $xy_l(x) = (-1)^{l+1} xn_l(x)$, $xh_l^{(1)}(x)$ e $xh_l^{(2)}(x)$.

5 Funzioni sferiche

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importante per la fisica matematica.

5.1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \dots$ ogni polinomio armonico⁵ omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra

⁵Una funzione $v = v(x_1, \dots, x_n)$ si dice *armonica* se $\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$.

le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \quad (\text{II.67})$$

dove $\Delta u_l = 0$, stabilisce una corrispondenza biunivoca.

Le funzioni sferiche Y_l e $Y_{l'}$, di ordini diversi sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, cioè

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds = 0, \quad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \Delta(|x|^l Y_l) - |x|^l Y_l \Delta(|x|^{l'} Y_{l'}) \right] dx \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial(|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial(|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] ds \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial(r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial(r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] ds = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 ($n = 2$). In coordinate polari abbiamo

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \quad x = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \sin(l\theta), & l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 ($n = 3$). In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \quad (\text{II.68})$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \dots$. Cerchiamo le soluzioni della (II.68) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos \varphi$ e scriviamo (II.68) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial \xi} \right) + l(l+1)Y_l(\theta, \xi) = 0. \quad (\text{II.69})$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right] \mathcal{P}(\xi) = 0. \quad (\text{II.70})$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-[(1-\xi^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

5.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi)h^l, \quad |h| < 1,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x), \quad -1 < x < +1; \quad P_l(1) = 1,$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi)P_{l'}(\xi) d\xi = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},$$

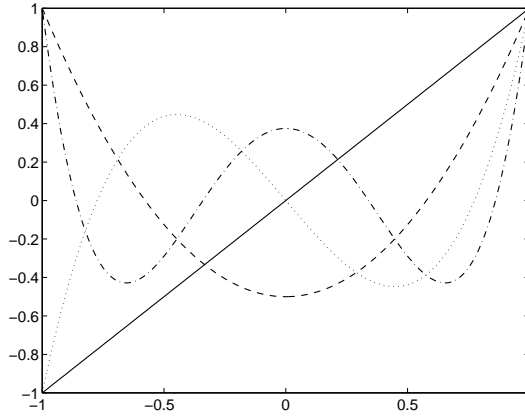


Figura II.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

4. tramite la formula di Rodrigues

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l (\xi^2 - 1)^l,$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$(2l + 1)\xi P_l(\xi) = (l + 1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4 \Rightarrow 2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1 - x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (\text{II.71})$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \rightarrow \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l + 1)$ dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.72})$$

soddisfano la (II.71) per $\lambda = l(l + 1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (II.72) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2 - 1)W_l'(x) - 2lxW_l(x) = 0$$

$l + 1$ volte, si ottiene

$$(x^2 - 1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (II.71). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^s (x-1)^l \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{l-s} (x+1)^l \right) \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \left(\frac{l!}{(l-s)!} (x-1)^{l-s} \right) \left(\frac{l!}{s!} (x+1)^s \right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$.

2 \Rightarrow 4. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = u'(x)$ nella (II.71) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2 \frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espressione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^2 = 1$). Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (II.71) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene questa formula dalla proprietà 2.

(2 + 4) \Rightarrow 3. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L^2(-1, 1)$. Infatti, utilizzando la (II.71) si ha

$$\begin{aligned} & [l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[P_l(k) [(1-x^2)P_k']' - P_k(x) [(1-x^2)P_l']' \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l

integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned}(P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+1} \cdot l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots 1} = \frac{2}{2l+1},\end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$, $I_0 = 2$, per $I_l = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx$. Quindi $\sqrt{l + \frac{1}{2}} P_l(x)$ ha norma 1 in $L^2(-1, 1)$.

(3 + 4) ⇒ 5. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l) . Infatti, dopo $l + 1$ integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(x f)^{(l+1)} = x f^{(l+1)} + (l+1) f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot ((l+1)!(l!))} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \right] dx \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{1}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+2} \cdot (l+1)!}{(2l+3)(2l+1)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.\end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l + 1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l + 1$]. Risultano $(2l + 1)(xP_l, P_j) = (2l + 1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j - 1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l + 1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\ (2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).\end{aligned}$$

Quindi $a_{l+1} = l + 1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (\text{II.73})$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x); \\ -1 \leq P_l(x) \leq +1, \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (\text{II.74})$$

5 \Rightarrow 1. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}}, \quad |h| < 1. \quad (\text{II.75})$$

Infatti, scriviamo $F(x, h)$ per la parte a sinistra della (II.75). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h , grazie alla (II.74). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)xP_l(x)h^l = xF(x, h) + 2xh \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = xF(x, h) + 2xh \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=0}^{\infty} (l + 1)P_{l+1}(x)h^l = \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}(x)h^l = h^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l - 1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1} \\ = h^2 \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h).$$

Applicando la (II.73) si ha

$$xF(x, h) = (1 - 2xh + h^2) \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h),$$

dove $F(x, 0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F / \partial h}{F(x, h)} = \frac{x - h}{1 - 2xh + h^2}, \quad F(x, 0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x, h)$ data dalla parte a destra della (II.75).

1 \Rightarrow 2. Scrivendo $F(x, h)$ per la parte a destra nella (II.75) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -h \left(\frac{\partial}{\partial h} \right)^2 (hF(x, h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l \right) = - \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) P_l(x) h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x = 1$ nella (II.75) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1) h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1) = 1$.

5.3 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} z(\xi)$ nella (II.70). Risulta

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)\xi z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0. \quad (\text{II.76})$$

Moltiplicando la (II.76) per $(1-\xi^2)^m$, otteniamo per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l$

$$[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_l]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l. \quad (\text{II.77})$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l :

$$(1-\xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m -esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (II.76). Moltiplicando la (II.77) per $\mathcal{P}_{l'}$ e la (II.77) con l' invece di l per \mathcal{P}_l e sottraendo, otteniamo

$$[(l-l')(l+l'+1)](1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_{l'}(\xi) = \mathcal{P}_l(\xi) [(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_{l'}]' - \mathcal{P}_{l'}(\xi) [(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_l]'$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l-l')(l+l'+1)] \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_{l'}(\xi) d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) sono un sistemi di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1-\xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m)}(\xi) d\xi \\
&= \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) \right]' d\xi \\
&= (l - m - 1)(l + m) \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) d\xi \\
&= (l + m)(l - m + 1)(l + m - 1)(l - m + 2) \times \\
&\times \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-2} P_l^{(m-2)}(\xi) P_{l'}^{(m-2)}(\xi) d\xi \\
&= \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{l,l'}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l + m) + 1}{2} \frac{l!}{(l + 2m)!} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^m P_{l+m}(\xi), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1 - \xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

5.4 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in \mathbb{R}^3 . Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos \varphi) (\sin \varphi)^m \cos(m\theta), & m = 0, 1, \dots, l; \\ P_l^{|m|}(\cos \varphi) (\sin \varphi)^m \sin(|m|\theta), & m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Le funzioni sferiche Y_l^m ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$) di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l .

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|_{L^2(S^2)}^2 = 2\pi \frac{1 + \delta_{0,m}}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{l - |m|!}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 d\theta d\varphi \\ &= \int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\xi)^2 (1 - \xi^2)^m d\xi \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\theta \\ \sin^2 m\theta \end{array} \right\} d\theta = 2\pi \frac{1 + \delta_{0,m}}{2l + 1} \frac{l + |m|!}{(l - |m|)!}. \end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L^2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s),$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l + 1}{2\pi(1 + \delta_{0,m})} \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, sono autofunzioni dell'operatore di Beltrami,

$$-\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l + 1)$ di molteplicità $2l + 1$.

6 Polinomi di Hermite

L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.13). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2 c^2 u^2)U(u) &= 0, \\ V''(v) - (\mu + \lambda^2 c^2 u^2)V(v) &= 0, \end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) &= 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \quad (\text{II.78})$$

dove u , z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \quad (\text{II.79})$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \quad (\text{II.80})$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (II.80) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (II.78) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Sostituendo $v(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ nella (II.80) si trova la seguente espressione per il coefficiente di z^l :

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} + 2(\nu-l)c_l = 0. \quad (\text{II.81})$$

La (II.81) è una relazione di ricorrenza che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dai coefficienti $c_0 = v(0)$ e $c_1 = v'(0)$. Si vede facilmente che esistono soluzioni polinomiali se e solo se $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$. Tali soluzioni hanno la proprietà $v(-z) = (-1)^n v(z)$ e hanno il grado n (cioè, $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$).

Definiamo ora

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d}{dz} \right)^n \{ e^{-z^2} \}. \quad (\text{II.82})$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n , ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2} v$. Infine risulta l'equazione (II.80) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \quad (\text{II.83})$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (II.83). La (II.82) si dice formula di Rodriguez.

Scriviamo ora la (II.80) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n e^{-z^2} v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H'_m)' H_n(z) - (e^{-z^2} H'_n)' H_m(z).$$

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$\begin{aligned} 2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz &= \left[e^{-z^2} (H'_m(z)H_n(z) - H'_n(z)H_m(z)) \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-z^2} H'_m(z)H'_n(z) - e^{-z^2} H'_n(z)H'_m(z) \right) dz = 0. \end{aligned}$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}; e^{-z^2} dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichi la formula di Rodriguez (II.82) e n integrazioni per parti, risultando nella seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2} dz &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j+1} \left[H_n^{(j-1)}(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-j} \{e^{-z^2}\} \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^n H_n(z) \right) e^{-z^2} dz \\ &= \left[p(z)e^{-z^2} \right]_{z=-\infty}^{\infty} + c_n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = c_n n! \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \dots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n . Derivando la formula di Rodriguez (II.82) si arriva all'identità

$$H'_n(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z). \quad (\text{II.84})$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (II.84) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \delta_{n,m}, \quad (\text{II.85})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (II.83) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H'_n(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H'_n(z) = \text{cost.} H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n z^n + \dots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1} z^{n-1} + \dots$, risulta $n 2^n = \text{cost.} 2^{n-1}$ e quindi $\text{cost.} = 2n$. In altre parole,

$$H'_n(z) = 2n H_{n-1}(z). \quad (\text{II.86})$$

Dalle equazioni (II.84) e (II.86) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z), \quad (\text{II.87})$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$. In Fig. II.4 abbiamo tracciato alcuni grafici dei polinomi di Hermite.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.88})$$

Infatti, ponendo $F(z, t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!} t^n \quad (\text{II.89})$$

per opportuni coefficienti $h_n(z)$, risultano

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2tF(z, t)$$

e [poichè?]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n(z)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!} t^n.$$

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h'_n(z) = 2nh_{n-1}(z). \quad (\text{II.90})$$

Dalla (II.89) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n -esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodriguez (II.82) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando le espressioni (II.86) e (II.90) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (II.88).

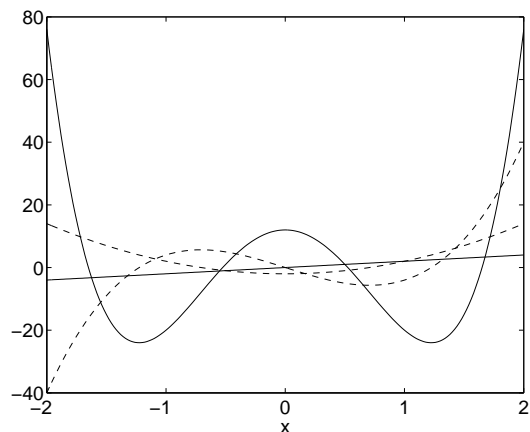


Figura II.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

7 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodriguez:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}. \quad (\text{II.91})$$

Si dimostra facilmente che la (II.91) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \dots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha} e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \quad (\text{II.92})$$

Derivando la (II.92) $n + 1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x + 1 - \alpha)u' + (n + 1)u = 0.$$

Sostituendo $u = x^\alpha e^{-x}v$ in quest'ultima equazione si ottiene la seguente equazione differenziale di Laguerre:

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{II.93})$$

Di conseguenza, $L_n^{(\alpha)}(x)$ è una soluzione dell'equazione (II.93).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{II.94})$$

Sostituendo $v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$ si trova la seguente espressione per il coefficiente di x^l :

$$(l + 1)(l + \alpha + 1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l - \nu}{(l + 1)(l + \alpha + 1)}, \quad (\text{II.95})$$

che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dal coefficiente iniziale $c_0 = v(0)$; bisogna richiedere $\alpha > -1$ per garantire la positività del denominatore nella parte a destra della (II.95). Risulta una soluzione polinomiale di grado $n = 0, 1, 2, \dots$ se e solo se $\nu = n$.

Scrivendo la (II.93) nella forma

$$(x^{\alpha+1} e^{-x} v')' + n x^\alpha e^{-x} v = 0, \quad (\text{II.96})$$

otteniamo

$$(n-m)x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'} \right)' - L_m^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'} \right)'$$

Calcolando l'integrale sull'intervallo $(0, \infty)$ [dove l'ipotesi $\alpha > -1$ serve per la convergenza dell'integrale] si ottiene

$$\begin{aligned} & (n-m) \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \left[L_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'}(x) \right]_{x=0}^\infty \\ & - \int_0^\infty \left\{ L_n^{(\alpha)'}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)'}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'}(x) \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx &= \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (II.91) con $\alpha + j$ al posto di α , applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \dots$ e l'identità (A.1). In altre parole,

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{n,m}, \quad (\text{II.97})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (II.93) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v'') + (\alpha + 2 - x)(v') + (n - 1)v = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)'}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (\text{II.98})$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$ conduce all'identità

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\text{II.99})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \dots$. Poi calcoliamo il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
D_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty ((n+1)!x - n(n+\alpha)n!) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $xL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \dots$. Dalla (II.99) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\text{II.100})$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$. In Fig. II.5 abbiamo tracciato i grafici di alcuni polinomi di Laguerre.

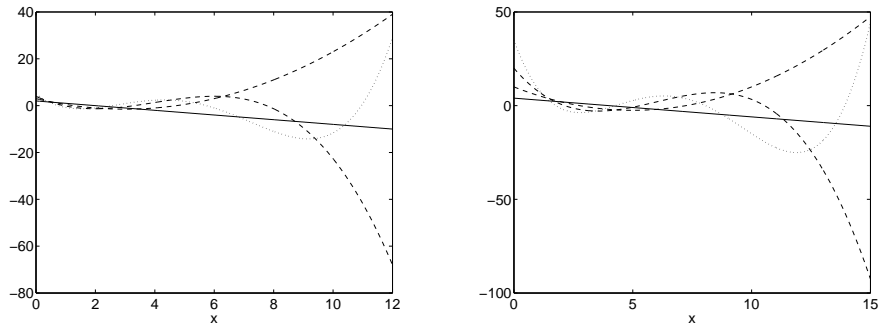


Figura II.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{II.101})$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$F(x, t) = (1 - t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{II.102})$$

dove $c_n(x)n!$ è la derivata parziale n -esima di $F(x, t)$ rispetto a t per $t = 0$. Sostituendo la serie (II.102) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)]F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) e per il coefficiente di t^0 :

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x - 2n - \alpha - 1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x - \alpha - 1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ (vedi la (II.100)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t^2)L_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha+1}e^{-t^2} dt, \quad (\text{II.103})$$

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} tL_n^{(\alpha)}(t^2)tL_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha-1}e^{-t^2} dt. \quad (\text{II.104})$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm 1}$ in (II.103) e (II.104) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (II.103) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (II.104). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n} n! (-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \quad (\text{II.105})$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1} n! (-1)^n t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \quad (\text{II.106})$$

8 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie $T_n(x)$ e di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:

$$U_n(x) = \cos(nt), \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}, \quad (\text{II.107})$$

where $x = \cos(t)$. In tal caso $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= 2xU_n(x). \end{aligned}$$

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\ &= 2\cos(t)\cos(nt) = 2xT_n(x), \\ U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\ &= \frac{2\cos(t)\sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1, 1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$ per $n \in \mathbb{N}$. In Fig. II.6 abbiamo tracciato i grafici di $T_n(x)$ e $U_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)dt &= \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{n,0})\delta_{n,m}, \\ \int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(m+1)t)dt &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{n,0})\delta_{n,m}, \quad (\text{II.108})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}. \quad (\text{II.109})$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

Le funzioni $u(t) = \cos(nt)$ e $u(t) = \sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) &= 0, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2U_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

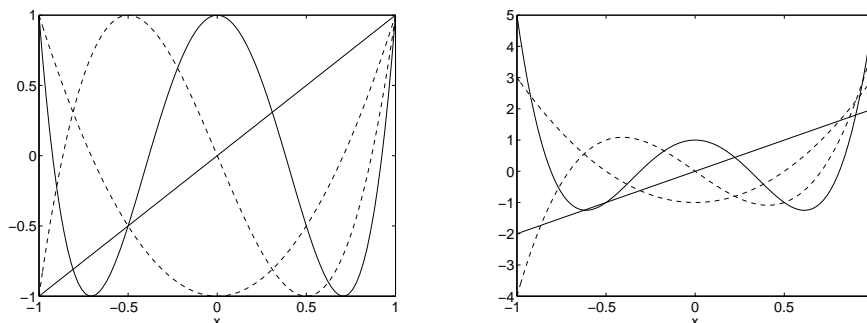


Figura II.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie di grado 1, 2, 3 e 4. Nel pannello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel pannello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{1/2} T_n'(x) \right) = -n^2 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{3/2} U_n'(x) \right) = -n^2 \sqrt{1-x^2} U_n(x).$$

9 Polinomi Ortogonali

Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n} w(x) dx < \infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Allora i polinomi sono tutti elementi dello spazio di Hilbert $L^2(I; w dx)$. Infatti, i polinomi costituiscono un sottospazio lineare denso in $L^2(I; w dx)$, un fatto che non dimostriamo. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rispetto al peso w , dove il grado

Tabella II.1: I polinomi ortogonali classici

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1, 1)$	1
Chebyshev di 1 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^m$ per $m = 1, 2, 3, \dots$
Jacobi	$(-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ con $\alpha, \beta > -1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^\lambda$ con $\lambda > -1$
Laguerre	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha > -1$
Hermite	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}

di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w dx)$ e definendo i coefficienti

$$c_n = \int_I f(x)p_n(x)w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n p_n(x) \right|^2 w(x) dx = 0.$$

I polinomi ortogonali sono stati studiati nel libro di Szegő [9]. Alcune classi di polinomi ortogonali hanno la proprietà aggiuntiva che appaiono come le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville su un opportuno intervallo I della retta reale. Ce l'abbiamo già visto per quanto riguardano i polinomi di Legendre, i polinomi associati di Legendre, e quelli di Hermite, Laguerre e Chebyshev. A quelli si aggiungono i polinomi di Gegenbauer (anche detti polinomi ultrasferici⁶) e i polinomi di Jacobi.

Infine dimostriamo alcune proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

⁶I polinomi ortogonali su $I = (-1, 1)$ con $w(x) = (1 - x^2)^\lambda$ per cui $2\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, appaiono come funzioni sferiche di dimensione $\geq 2\lambda + 3$.

Lemma II.1 *Si ha $(f, p_n)_{L^2(I; w dx)} = 0$ per ciascun polinomio f di grado $< n$.*

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado $< n$. Allora f è una combinazione lineare dei polinomi p_0, p_1, \dots, p_{n-1} . Siccome $(p_j, p_n) = 0$ in $L^2(I; w dx)$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$, risulta $(f, p_n) = 0$. \square

Teorema II.2 *Gli zeri del polinomio p_n sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo I .*

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che p_n ha m (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in (a, b) e $n - m$ zeri in $\mathbb{C} \setminus (a, b)$. Allora p_n ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)q(x),$$

dove q è un polinomio di grado $n - m$ che non cambia segno in (a, b) ; dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. Consideriamo il polinomio f definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma II.1 risulta $(f, p_n) = 0$. In particolare,

$$0 = (f, p_n) = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) w(x) dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) w(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di p_n appartengono ad (a, b) .

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di p_n , rappresentiamo p_n come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove β_1, \dots, β_r sono gli zeri distinti di p_n e $m_1 + \dots + m_r = n$. Bisogna dimostrare che $r = n$, $m_1 = \dots = m_n = 1$ e $c > 0$. Se esiste un indice j con $m_j > 1$, definiamo $n_j = 0$ se m_j è pari e $n_j = 1$ se m_j è dispari (cioè, se $m_j = 3, 5, 7, \dots$). Poi consideriamo il polinomio g definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di g è strettamente minore di n , si ha $(g, p_n) = 0$. In altre parole

$$0 = c \int_I (x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r},$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa.⁷ Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude che tutti gli n zeri di p_n sono semplici. \square

⁷Si osservi che $m_j + n_j$ è pari.

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini. Se si conoscono i coefficienti in tale relazione, risulta un metodo veloce (in particolare, dal punto di vista numerico) per calcolarli.

Teorema II.3 Sia $\alpha_n = (xp_{n+1}, p_n)$, $c_n = (xp_n, p_n)$ e $\alpha_{-1} = 0$. Allora

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n + 1$, è una combinazione lineare di $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n, p_j) = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x)w(x) dx = 0, \quad j < n - 1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n - 1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: p_{n-1}, p_n, p_{n+1} . Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1}) \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1}) = (xp_{n-1}, p_n) = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n). \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato la tesi. □

Capitolo III

EQUAZIONI INTEGRALI

1 Proprietà Elementari e Iterazione

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno dell'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy = f(x), \quad (\text{III.1})$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x), \quad (\text{III.2})$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (III.1) si dice *equazione integrale di prima specie*, mentre l'equazione (III.2) si dice *equazione di Fredholm di seconda specie*. Le funzioni note $\mathcal{K}(x, y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

L'equazione integrale (III.2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy \quad (\text{III.3})$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (III.2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\psi(y) dy + g(x), \quad (\text{III.4})$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\psi(y) dy, \quad (\text{III.5})$$

dove $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$, sono dette *aggiunte* alle equazioni (III.2) e (III.3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x, y)$ si dice *nucleo coniugato aggiunto* al nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si dice *hermitiano* se $\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$, cioè se $\overline{\mathcal{K}(y, x)} = \mathcal{K}(x, y)$ quasi ovunque. Il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si dice *reale e simmetrico* se $\mathcal{K}(x, y)$ è reale e $\mathcal{K}(y, x) = \mathcal{K}(x, y)$ quasi ovunque. Ovviamente un nucleo reale e simmetrico è hermitiano.

Scriveremo le equazioni (III.2), (III.3), (III.4) e (III.5) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda K\varphi + f, & \varphi = \lambda K\varphi, \\ \psi = \bar{\lambda}K^*\psi + g, & \psi = \bar{\lambda}K^*\psi, \end{cases}$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathcal{K}(x, y)$ e $\mathcal{K}^*(x, y)$, rispettivamente:

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y)f(y) dy, \quad (K^*f)(x) = \int_G \mathcal{K}^*(x, y)f(y) dy.$$

Tra poco metteremo opportune condizioni sul dominio G e sul nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ affinché gli operatori lineari K e K^* siano limitati in un opportuno spazio di Banach (o di Hilbert) di funzioni $f(x)$ definite in G . In particolare, verranno considerati gli spazi $L^1(G)$, $L^2(G)$ e $C(\overline{G})$.

Supponiamo che nell'equazione integrale (III.2) la regione G sia limitata in \mathbb{R}^n , la funzione f appartenga allo spazio $L^2(G)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sia continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Lemma III.1 *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ trasferisce $L^2(G)$ in $C(\overline{G})$ (e, di conseguenza, $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$ e $L^2(G)$ in $L^2(G)$). Dunque, K è limitato come operatore lineare tra questi spazi, ed inoltre*

$$\|Kf\|_C \leq M\sqrt{m(G)}\|f\|_2, \quad f \in L^2(G), \quad (\text{III.6})$$

$$\|Kf\|_C \leq Mm(G)\|f\|_C, \quad f \in C(\overline{G}), \quad (\text{III.7})$$

$$\|Kf\|_2 \leq Mm(G)\|f\|_2, \quad f \in L^2(G), \quad (\text{III.8})$$

dove $M = \max_{x, y \in \overline{G} \times \overline{G}} |\mathcal{K}(x, y)|$ e $m(G)$ è la misura di G .

Dimostrazione. Siccome $\overline{G} \times \overline{G}$ è compatto,¹ il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente continuo in $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale

¹Una funzione continua definita su uno spazio compatto è uniformemente continua.

che $|\mathcal{K}(x_1, y_1) - \mathcal{K}(x_2, y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta$. Di conseguenza, se $f \in L^2(G)$, per $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha la stima

$$\begin{aligned} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| &\leq \int_G |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_G |f(y)| dy \leq \varepsilon \sqrt{M(G)} \|f\|_2, \end{aligned}$$

e quindi K trasferisce $L^2(G)$ in $C(\overline{G})$.

Per $f \in C(\overline{G})$ si trova la stima

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(x)|^2 dx \leq m(G) \|f\|_C^2, \quad f \in C(\overline{G}),$$

implicando $\|f\|_2 \leq \sqrt{m(G)} \|f\|_C$. Dunque $C(\overline{G})$ è contenuto in $L^2(G)$, dove l'operatore di immersione è limitato di norma limitata superiormente da $\sqrt{m(G)}$. \square

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (III.2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) \equiv \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{III.9})$$

Quindi

$$\varphi^{(p)} = \sum_{j=0}^p \lambda^j K^j f, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{III.10})$$

dove K^j denotano le potenze j -esime dell'operatore K . Secondo il Lemma III.1, le iterazioni di $f \in L^2(G)$ soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_2 &= \|K(K^{p-1} f)\|_2 \leq M m(G) \|K^{p-1} f\|_2 \\ &\leq (M m(G))^2 \|K^{p-2} f\|_2 \leq \dots \leq (M m(G))^p \|f\|_2, \end{aligned}$$

cioè

$$\|K^p f\|_2 \leq (M m(G))^p \|f\|_2, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.11})$$

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K^j f)(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (\text{III.12})$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata nella norma L^2 dalla serie numerica

$$\|f\|_2 \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j (Mm(G))^j = \frac{\|f\|_2}{1 - |\lambda|Mm(G)}, \quad (\text{III.13})$$

che converge nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$.

Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f, g \in L^2(G). \quad (\text{III.14})$$

Infatti, se f e g appartengono a $L^2(G)$, conformemente al Lemma III.1, anche Kf e K^*g appartengono a $L^2(G)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_G (Kf)(x) \overline{g(x)} dx = \int_G \left[\int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_G f(y) \left[\int_G \mathcal{K}(x, y) \overline{g(x)} dx \right] dy = \int_G f(y) \left[\int_G \overline{\mathcal{K}^*(y, x) g(x)} dx \right] dy \\ &= \int_G f(x) \overline{(K^*g)(x)} dx = (f, K^*g). \end{aligned}$$

Lemma III.2 *Se K_1 e K_2 sono operatori integrali con nuclei continui $\mathcal{K}_1(x, y)$ e $\mathcal{K}_2(x, y)$, rispettivamente, l'operatore $K_3 = K_2K_1$ è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x, y) = \int_G \mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'. \quad (\text{III.15})$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \quad (\text{III.16})$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in L^2(G)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (K_3f)(x) &= (K_2K_1f)(x) = \int_G \mathcal{K}_2(x, y') \int_G \mathcal{K}_1(y', y) f(y) dy dy' \\ &= \int_G \int_G [\mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'] f(y) dy, \end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.15). È evidente che il nucleo $\mathcal{K}_3(x, y)$ è continuo per $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, per $i = 1, 2$ esiste $\delta_i > 0$ tale che $|\mathcal{K}_i(x_1, y_1) - \mathcal{K}_i(x_2, y_2)| < \varepsilon / ([M_1 + M_2]m(G))$ se $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta_i$. Quindi, se $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, risulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_3(x_1, y_1) - \mathcal{K}_3(x_2, y_2)| &\leq \int_G |\mathcal{K}_2(x_1, y') - \mathcal{K}_2(x_2, y')| |\mathcal{K}_1(y', y_1)| dy' \\ &+ \int_G |\mathcal{K}_2(x_2, y')| |\mathcal{K}_1(y', y_1) - \mathcal{K}_1(y', y_2)| dy' < \frac{[M_2m(G) + M_1m(G)]\varepsilon}{[M_1 + M_2]m(G)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

implicando la continuità uniforme di $\mathcal{K}_3(x, y)$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (III.14), per tutte le f e g appartenenti a $L^2(G)$ si ottiene

$$(f, K_3^*g) = (K_3f, g) = (K_2K_1f, g) = (K_1f, K_2^*g) = (f, K_1^*K_2^*g), \quad f, g \in L^2(G),$$

cioè $(f, K_3^*g - K_1^*K_2^*g) = 0$ per tutte le $f, g \in L^2(G)$, e, quindi, $K_3^* = K_1^*K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (III.16). Il lemma è dimostrato. \square

Dal Lemma III.2 appena dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2, 3, \dots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$,

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_G \mathcal{K}(x, y')\mathcal{K}_{p-1}(y', y) dy' = \int_G \mathcal{K}_{p-1}(x, y')\mathcal{K}(y', y) dy'. \quad (\text{III.17})$$

I nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (III.17) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p m(G)^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{III.18})$$

Dalla (III.18) segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}, \quad (\text{III.19})$$

è maggiorata mediante la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} m(G)^k,$$

convergente nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Perciò la serie (III.19) è uniformemente (anche totalmente) convergente in $(x, y, \lambda) \in \overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(G)) - \varepsilon\}$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Di conseguenza, la sua somma è continua in $\overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(G))\}$ ed analitica in λ nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Indichiamo la somma della serie (III.19) con $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y).$$

La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Teorema III.3 *La soluzione φ dell'equazione integrale (III.2) è unica nella classe $L^2(G)$ per $|\lambda| < 1/Mm(G)$ e per qualunque $f \in L^2(G)$ è rappresentata con il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y) dy, \quad (\text{III.20})$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R(\lambda), \quad |\lambda| < (1/Mm(G)), \quad (\text{III.21})$$

dove $R(\lambda)$ è un operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$.

Si può dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

2 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano

Un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è detto *hermitiano* se questo nucleo coincide con il suo coniugato hermitiano, $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$. La corrispondente equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (\text{III.22})$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$ un operatore autoaggiunto nello spazio $L^2(G)$. Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è continuo, K è anche limitato su $L^2(G)$. Gli autovalori e le autofunzioni trovati sono anche gli autovalori e le autofunzioni se la (III.22) viene considerata nello spazio $L^2(G)$ per un nucleo continuo ed hermitiano qualsiasi.

a. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$. Quest'operatore trasferisce $L^2(G)$ (G è una regione limitata) in $L^2(G)$ (vedi il Lemma III.1) ed è autoaggiunto:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in L^2(G). \quad (\text{III.23})$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ è autoaggiunto, questo nucleo è hermitiano. Infatti, dalla (III.23) (valida anche per $f, g \in C(\overline{G})$) segue che $\mathcal{K}(x, y)$ e $\mathcal{K}^*(x, y)$ sono ambedue il nucleo dell'operatore integrale K e quindi $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$.

Segue facilmente che tutti i nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ sono anch'essi hermitiani:

$$\mathcal{K}_p^*(x, y) = (\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p(x, y).$$

Sia M un compatto. Un sottoinsieme \mathcal{M} (cioè, un insieme di funzioni continue su M) si dice *equicontinuo* su M se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{M}$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta$ per $x_1, x_2 \in M$. In particolare, $f \in C(M)$ è (uniformemente) continua se e solo se l'insieme $\mathcal{M} = \{f\}$ è equicontinuo.

Lemma III.4 *Un operatore integrale M con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $L^2(G)$ in un insieme limitato in $C(\overline{G})$ e equicontinuo su \overline{G} .*

Dimostrazione. Sia B un insieme limitato in $L^2(G)$: $\exists A : \|f\|_p \leq A$ per ogni $f \in B$. Dal Lemma III.1 segue che $\|Kf\|_C \leq Mm(G)^{1/2}A$, $f \in B$, $p = 1, 2$, e quindi K trasferisce B in un insieme limitato in $C(\overline{G})$. Inoltre, visto che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$, per un $\varepsilon > 0$ qualsiasi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)| < \frac{\varepsilon}{A(m(G))^{1/2}},$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (III.6), in cui $\mathcal{K}(x, y)$ è sostituito con $|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)|$, per ogni $f \in B$ si ottiene

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \left| \int_G [\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)] f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon(m(G))^{(p-1)/p} \|f\|_p}{A(m(G))^{(p-1)/p}} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{G}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{Kf : f \in B\}$ è equicontinuo su \overline{G} . \square

Teorema III.5 [Teorema di Ascoli-Arzelà] *Se un insieme infinito B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M , da quest'insieme si può estrarre una successione convergente in $C(M)$.²*

Dimostrazione. Come è noto, ogni compatto in \mathbb{R}^n ha un sottoinsieme denso numerabile $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$. Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1) : f \in B\}$ è limitato. Quindi esiste una successione $\{f_k^{(1)}\}_{k=1}^\infty$ tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ è convergente se $k \rightarrow \infty$. Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2) : k =$

²In altre parole, se un insieme B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M , la sua chiusura in $C(M)$ è compatta.

$1, 2, \dots$ è limitato, estraiamo dalla $\{f_k^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_k^{(2)}\}$ tale che $\{f_k^{(2)}(x_2)\}$ è convergente. Continuando così, troviamo le successioni $\{f_k^{(m)}\}$ in B , dove $n = 1, 2, \dots$ e $\{f_k^{(n+1)}\}$ è una sottosuccessione della $\{f_k^{(n)}\}$, tale che $\{f_k^{(n)}(x_n)\}$ è convergente se $n \rightarrow \infty$.

Consideriamo ora la successione diagonale $\{g_k\}$ in B dove $g_k = f_k^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $\{g_k(x_i)\}$ converge se $k \rightarrow \infty$, poichè, per costruzione, per $k \geq i$, questa successione è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_k^{(i)}(x_i)\}$.

Dimostriamo ora che la successione di g_k , $k = 1, 2, \dots$, è uniformemente convergente su M . Supponiamo che sia $\varepsilon > 0$. Visto che questa successione è equicontinua su M , esiste $\delta > 0$ tale che per $k = 1, 2, \dots$ si ha

$$|g_k(x) - g_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{III.24})$$

quando $|x - x'| < \delta$ e $x, x' \in M$. Essendo M compatto, dall'insieme di punti x_1, x_2, \dots si può scegliere un numero finito di questi punti, x_1, x_2, \dots, x_l , $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni punto $x \in M$ esista un punto x_i , $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $g_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, converge ai punti x_1, \dots, x_l , concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|g_k(x_i) - g_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k, p \geq N, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (\text{III.25})$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme M . Scegliendo un punto x_i , $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (III.24) e (III.25) si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_p(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_p(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad k, p \geq N, \end{aligned}$$

dove N non dipende da $x \in M$. Ciò significa che la successione di g_k , $k = 1, 2, \dots$, è una successione di Cauchy in $C(M)$. Siccome $C(M)$ è uno spazio di Banach, la successione converge uniformemente su M . \square

Il teorema di Ascoli-Arzelà esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato e equicontinuo in $C(M)$. Inoltre, il Lemma III.4 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato in $L^2(G)$ in un sottoinsieme di $C(\overline{G})$ con chiusura (in $C(\overline{G})$) compatta.

c. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano: Il principio variazionale. In questo paragrafo descriviamo gli autovalori di un operatore integrale con nucleo hermitiano.

Teorema III.6 [Principio di Rayleigh-Ritz] *Ogni nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ ha almeno un autovalore e l'autovalore λ_1 più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{0 \neq f \in L^2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}. \quad (\text{III.26})$$

Dimostrazione. Sia

$$\nu = \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2. \quad (\text{III.27})$$

Dalla (III.8) segue che $\|Kf\|_2 \leq M m(G)$ sulle funzioni di $L^2(G)$ di norma 1 e quindi $\nu \leq M m(G)$. È inoltre evidente che $\nu \geq 0$. Dimostriamo che $\nu > 0$. Infatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (III.27), avremmo $\|Kf\|_2 = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in L^2(G)$, e quindi $\mathcal{K}(x, y) = 0$, $x, y \in G$, il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione della ν segue l'esistenza di una successione di f_k , $k = 1, 2, \dots$, $\|f_k\|_2 = 1$, tale che

$$\|Kf_k\|_2 \rightarrow \nu, \quad k \rightarrow +\infty; \quad (\text{III.28})$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\|K^2 f\|_2 = \left\| K \left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2} \right) \right\|_2 \|Kf\|_2 \leq \nu \|Kf\|_2, \quad f \in L^2(G). \quad (\text{III.29})$$

Dimostriamo ora che

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty \text{ in } L^2(G). \quad (\text{III.30})$$

Infatti, utilizzando le (III.23), (III.28) e (III.29), si ottiene

$$\begin{aligned} \|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_2^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) \\ &= (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) \\ &= \|K^2 f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (Kf_k, Kf_k) \\ &\leq \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \\ &= \nu^4 - \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (III.30).

Conformemente al Lemma III.4, la successione delle funzioni Kf_k , $k = 1, 2, \dots$, è limitata in $C(\overline{G})$ e equicontinua su \overline{G} . Ma in questo caso, in base al teorema di Ascoli-Arzelà, esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$,

$i = 1, 2, \dots$, che converge in $C(\overline{G})$ ad una funzione $\psi \in C(\overline{G})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Da ciò, utilizzando le (III.6) e (III.7), e la relazione (III.30), si ottiene

$$\begin{aligned} \|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C &\leq \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \\ &\leq M m(G)\|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2f_{k_i} - \nu^2f_{k_i})\|_C \\ &\leq (M^2m(G)^2 + \nu^2)\|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{m(G)}\|K^2f_{k_i} - \nu^2f_{k_i}\|_2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$K^2\psi = \nu^2\psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (III.30) segue che

$$K\psi_i - \nu^2f_{k_i} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty \text{ in } L^2(G),$$

e, di conseguenza, $\|K\psi_i\|_2 \rightarrow \nu^2$, $i \rightarrow +\infty$. D'altra parte, dal Lemma III.1 segue che $\|K\psi_i\|_2 \rightarrow \|K\psi\|_2$, $i \rightarrow +\infty$. Quindi, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ costruita è un'autofunzione del nucleo $\mathcal{K}_2(x, y)$ corrispondente all'autovalore ν^2 . Ma, allora, almeno uno dei numeri $\pm\nu$ è autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. In tal modo, l'autovalore λ_1 costruito è uguale a ν in modulo e, quindi, in virtù della (III.27), soddisfa il principio variazionale (III.26).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è l'autovalore più piccolo in modulo del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (III.26), si ha

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in L^2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{\|K\varphi_0\|_2}{\|\varphi_0\|_2} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$. □

Considerando il teorema sopra dimostrato ed i teoremi di Fredholm, per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti asserzioni:

L'insieme di autovalori $\{\lambda_k\}$ non è vuoto, è situato sull'asse reale, e non ha punti di accumulazione finiti; ogni autovalore è di molteplicità finita ed il sistema di autofunzioni $\{\varphi_k\}$ può essere scelto ortonormale:

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{k,i}. \quad (\text{III.31})$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, l'equazione (III.22) è univocamente risolvibile per un termine noto $f \in C(\overline{G})$ qualsiasi. Se $\lambda = \lambda_k$, per la risolvibilità dell'equazione (III.22) è necessario e sufficiente che

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1, \quad (\text{III.32})$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ_k e r_k è la molteplicità di λ_k .

3 Teorema di Hilbert-Schmidt

a. Teorema di Hilbert-Schmidt per un nucleo continuo hermitiano.

Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ siano gli autovalori del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{kl}$.

Come sappiamo, gli autovalori λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su \overline{G} ; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Inoltre, in virtù del 3.3, è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|f\|_2, \quad f \in L^2(G). \quad (\text{III.33})$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè³

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \quad x \in \overline{G}. \quad (\text{III.34})$$

Nel seguito verrà infatti dimostrato che vale l'uguaglianza nella (III.34).

Introduciamo ora la successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathcal{K}^{(p)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad . \quad (\text{III.35})$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani soddisfano

$$K^{(p)}f = Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad f \in L^2(G). \quad (\text{III.36})$$

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots$ costituiscono tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Infatti, in virtù della (III.36) abbiamo

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \quad k \geq p+1,$$

di modo che λ_k e φ_k , $k \geq p+1$, siano autovalori ed autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$, e cioè, in virtù della (III.36), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (\text{III.37})$$

³Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = +\infty$ per $k > N$.

Da qui per $k = 1, 2, \dots, p$ si ottiene

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0(K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} \\ &= \lambda_0(\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

e quindi, in virtù della (III.37), $\lambda_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Visto che φ_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno degli autovalori $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geq p+1$. Dunque, λ_{p+1} è il più piccolo autovalore del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ in modulo. Applicando la disuguaglianza (III.33) a questo nucleo e tenendo conto della (III.36), si ottiene la disuguaglianza

$$\|K^{(p)}f\|_2 = \left\| Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in L^2(G), \quad (\text{III.38})$$

dove $p = 1, 2, \dots$.

Supponiamo che il nucleo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ abbia un numero finito di autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathcal{K}^{(N)}(x, y)$ non ha autovalori, e quindi, in base al Teorema III.6, si ha $\mathcal{K}^{(N)}(x, y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (III.35), si ha

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad (\text{III.39})$$

il che significa che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di autovalori, formuliamo il seguente risultato: *affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di autovalori.*

Teorema III.7 [Teorema di Hilbert-Schmidt] *Se una funzione $f(x)$ appartiene all'immagine di un operatore integrale K di nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente convergente su \overline{G} alla funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (\text{III.40})$$

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in L^2(G)$, in base al Lemma III.1, $f \in C(\overline{G})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sono collegati con la relazione

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \quad (\text{III.41})$$

Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (III.39),

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$. Perciò, in virtù delle (III.38) e (III.41), la serie (III.40) converge a f nella norma di $L^2(G)$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^p (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_2 = \left\| Kh - \sum_{k=1}^p \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \right\|_2 \leq \frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow +\infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (III.40) converge in modo uniforme su \overline{G} . Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz e la (III.34), si ottiene, per tutti i valori di p e q e per ogni $x \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} \leq M \sqrt{m(G)} \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Siccome l'insieme ortonormale $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ può essere esteso ad una **base** ortonormale (per cui vale l'identità di Parseval) e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leq \|h\|_2^2,$$

il primo membro della disuguaglianza (III.42) tende a zero per $p, q \rightarrow +\infty$. Ciò significa che la serie (III.40) è puntualmente convergente su \overline{G} . Siccome il maggiorante in (III.42) non dipende da $x \in \overline{G}$, la convergenza risulta uniforme in $x \in \overline{G}$. \square

b. Sviluppo bilineare del nucleo iterato. Dimostriamo che *il nucleo iterato* $\mathcal{K}_2(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo,

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^2}, \quad (\text{III.43})$$

e la serie è uniformemente convergente su $\overline{G} \times \overline{G}$.

Tenendo conto del fatto che, in virtù della (III.17), si ha

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_G \mathcal{K}(x, y')\mathcal{K}(y', x) dy' = \int_G \mathcal{K}(x, y')\overline{\mathcal{K}(x, y')} dy' = \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy. \quad (\text{III.44})$$

Dal teorema di Dini⁴ segue che la serie (III.44) è uniformemente convergente su \overline{G} , poichè la parte a destra è una funzione continua in $x \in \overline{G}$. Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (III.44) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy. \quad (\text{III.45})$$

⁴Teorema di Dini: Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione *crescente* di funzioni continue definite su un compatto. Se esiste $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e f è continua sul compatto, allora la convergenza è uniforme.

Capitolo IV

PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE

0 Introduzione

In questo capitolo vengono studiati alcuni problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, in particolare le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano. La separazione delle variabili in tali equazioni conduce spesso a certe equazioni differenziali ordinarie in un intervallo della retta di tipo Sturm-Liouville, in particolare le equazioni di Bessel e di Legendre.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S regolare a tratti. Nel caso unidimensionale abbiamo $G = (a, b)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$. Alla fine del capitolo discuteremo alcuni casi in cui G è illimitata oppure multidimensionale.

1 Problemi agli autovalori

1.1 Impostazione del problema agli autovalori

Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (\text{IV.1})$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{G}), & q \in C(\overline{G}); & p(x) > 0, & q(x) \in \mathbb{R}, & x \in \overline{G}, \\ \alpha \in C(S), & \beta \in C(S), \\ \alpha(x) \geq 0, & \beta(x) \geq 0, & \alpha(x) + \beta(x) > 0, & x \in S. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Sia $S_0 = \{x \in S : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, \beta(x) \equiv 0, & \text{quindi } u = 0, \ x \in S, & \text{[problema di Dirichlet]} \\ \alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 1, & \text{quindi } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in S, & \text{[problema di Neumann]}. \end{cases}$$

Il problema (IV.1)-(IV.2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfi l'equazione (IV.1) in G e la condizione (IV.2) sulla frontiera S . Evidentemente, il problema (IV.1)-(IV.2) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (IV.1)-(IV.2) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\text{div}(\text{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfano la condizione al contorno (IV.2) e la condizione $Lf \in L_2(G)$ costituiscono il dominio \mathcal{M}_L dell'operatore L . Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(G)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(G)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in G) è denso in $L_2(G)$ ed è contenuto in \mathcal{M}_L , \mathcal{M}_L è denso in $L_2(G)$.

In generale, il dominio \mathcal{M}_L di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

1.2 Formule di Green

Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v \in C^1(\overline{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G v Lu \, dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} \, dS + \int_G quv \, dx. \quad (\text{IV.4})$$

Per dimostrare la formula (IV.4) prendiamo una regione arbitraria G' con frontiera S' una superficie regolare a tratti tale che $\overline{G'} \subset G$. Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{G'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v Lu \, dx &= \int_{G'} v [-\text{div}(p \text{grad } u) + qu] \, dx \\ &= - \int_{G'} \text{div}(pv \text{grad } u) \, dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{G'} quv \, dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} pv \frac{\partial u}{\partial n'} dS' + \int_{G'} quv dx,$$

dove S' è la frontiera di G' . Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (IV.4). In tal caso l'integrale del primo membro della (IV.4) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui G' tende a G , poichè gli integrali nelle parte a destra della (IV.4) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (v Lu - u Lv) dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.5})$$

Per dimostrare la formula (IV.5), scambiamo u e v nella (IV.4):

$$\int_G u Lv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S pu \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_G quv dx, \quad (\text{IV.6})$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta dalla (IV.6). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (IV.5).

In particolare per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (IV.4) e (IV.5) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_G v \Delta u dx = - \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (\text{IV.7})$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.8})$$

1.3 Proprietà dell'operatore L

L'operatore L è hermitiano:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (\text{IV.9})$$

Infatti, visto che $f, \bar{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L_2(G)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in L_2(G)$. In tal caso la seconda formula di Green (IV.5), per $u = f$ e $v = \bar{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_G (\bar{g} Lf - f \overline{Lg}) dx = \int_S p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.10})$$

Inoltre, le funzioni f e \bar{g} soddisfano le condizioni al contorno (IV.2):

$$\left(\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_S = 0, \quad \left(\alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n}\right)\Big|_S = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Per l'ipotesi (IV.3), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in S$. Perciò per ogni $x \in S$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (IV.11) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$ e quindi il suo determinante si annulla, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (IV.10) otteniamo l'uguaglianza (IV.9), la quale significa che l'operatore L è hermitiano.

Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (IV.4) e tenendo conto del fatto che $f \in L_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p |\text{grad } f|^2 dx - \int_S pf \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_G q |f|^2 dx. \quad (\text{IV.12})$$

Dalla condizione al contorno (IV.2) segue che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f, & \beta(x) > 0, \quad x \in S; \\ f = 0, & \beta(x) = 0, \quad x \in S. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (IV.12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G (p |\text{grad } f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{IV.13})$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

In virtù delle ipotesi (IV.3) più l'ipotesi che $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \bar{G}$, nel secondo membro della (IV.13), tutti e tre termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geq \int_G p |\text{grad } f|^2 dx \geq \min_{x \in \bar{G}} p(x) \int_G |\text{grad } f|^2 dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geq p_0 \| |\text{grad } f| \|^2_2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{IV.14})$$

dove $p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su \overline{G} , si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (IV.14) segue che l'operatore L è positivo se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, cioè in tal caso

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (\text{IV.15})$$

Prima bisogna estendere il dominio dell'operatore hermitiano L . Per quello ci vuole una teoria sugli operatori lineari autoaggiunti non limitati su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ in H . Allora T si dice *chiuso* se per ogni successione $\{x_n\}$ in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$, si ha $x \in D(T)$ e $Tx = y$. Allora T è un operatore chiuso se e solo se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ è un insieme chiuso in $H \oplus H$ (con norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$).¹

Teorema IV.1 [Teorema del grafico chiuso] *Sia T un operatore lineare chiuso definito su uno spazio di Hilbert H . Allora T è limitato.*

Ora definiamo gli operatori autoaggiunti. Siano H uno spazio di Hilbert complesso e T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H . Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se $(Tx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in D(T)$. Per un operatore hermitiano T , definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}, \\ \text{In tal caso } \exists! z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H , T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa

$$D(T) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}.$$

Si vede facilmente che un operatore autoaggiunto è chiuso. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni

¹Per dimostrarlo, sia T chiuso e sia $\{(x_n, Tx_n)\}$ una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$ per qualche $(x, y) \in H \oplus H$. In tal caso $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ e, in virtù del fatto che T è chiuso, risultano $x \in D(T)$ e $Tx = y$; quindi $(x, y) \in G(T)$. D'altra parte, se $G(T)$ è chiuso in $H \oplus H$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. In tal caso $\{(x_n, Tx_n)\}$ è una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$. Siccome $G(T)$ è chiuso, risulta $(x, y) \in G(T)$, e quindi $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

$x, y \in H$. Prendendo il limite se $n \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza $(Tz, x_n) = (z, Tx_n)$ valida per ogni $z \in D(T)$, risulta $(Tz, x) = (x, y)$ e quindi $|(Tz, x)| \leq \|y\| \|z\|$ per ogni $z \in D(T)$. Di conseguenza, $x \in D(T)$ e $Tx = y$, così dimostrando il fatto che T è chiuso.

Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio \mathcal{M}_L . Allora L è hermitiano su $L_2(G)$ con dominio denso in $L_2(G)$. Sotto opportune condizioni che non specificheremo,² esiste un'estensione autoaggiunta unica \bar{L} dell'operatore L . Le autofunzioni del problema al contorno (IV.1)-(IV.2) si cercano nel dominio $D(\bar{L})$.

Ritorniamo adesso agli autovalori e autofunzioni dell'operatore L . Infatti bisogna discutere gli autovalori e le autofunzioni dell'estensione autoaggiunta \bar{L} . In altre parole, essi dipendono dalle condizioni al contorno (IV.2), ma le autofunzioni non potrebbero appartenere al dominio \mathcal{M}_L ma invece al dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} .

Proposizione IV.2 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

- a) *Tutti gli autovalori sono reali. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, gli autovalori sono non negativi.*
- b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*
- c) *Le autofunzioni possono essere scelte reali.*
- d) *Sia $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Affinchè $\lambda = 0$ è necessario e sufficiente che $q(x) \equiv 0$ ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e l'autofunzione è costante.*

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\bar{L})$ tale che $\bar{L}f = \lambda f$ e $f \neq 0$. Allora $(\lambda - \bar{\lambda})\|f\|_2 = (\bar{L}f, f) - (f, \bar{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in S$, dalla (IV.13) segue che $(\bar{L}f, f) \geq 0$.

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\bar{L})$ non banali tali che $\bar{L}f = \lambda f$ e $\bar{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\bar{L}f, g) - (f, \bar{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche \bar{f} è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di loro è un'autofunzione reale.

Infine, per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = 0$ un autovalore con corrispondente autofunzione f , mentre $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Allora dalla (IV.13)

²Certamente per $\alpha, \beta \geq 0$ costanti con $\alpha + \beta > 0$ e S regolare.

segue $p|\text{grad } f|^2 \equiv 0$ e quindi $[p(x) > 0 \text{ sempre}] f$ è costante e $qf \equiv 0$.³ Se f fosse non nulla, ne seguirebbe $q(x) = 0$ per ogni $x \in G$ e $f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in S_0$. Quindi $f \equiv 0$ e $q \equiv 0$. \square

2 Problema di Sturm-Liouville

Nel caso unidimensionale ($n = 1$, $G = (0, \ell)$, $S = \{0, \ell\}$) il problema al contorno (IV.1)-(IV.2) è detto *problema di Sturm-Liouville*. Ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.16})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.17})$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$. Assumiamo che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \left\{ \begin{array}{l} u'' \in L_2(0, \ell) \\ h_1u(0) - h_2u'(0) = 0 \\ H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0 \end{array} \right\} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste* oppure *condizioni di Robin*.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Inoltre esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville si cercano nel dominio di \bar{L} (e non necessariamente in \mathcal{M}_L).

L'espressione (IV.13) per l'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) è non negativo per ogni $f \in \mathcal{M}_L$. In particolare, se $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, \ell]$, $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.16)-(IV.17) e f è la corrispondente autofunzione, si ottiene $f' \equiv 0$,⁴ e quindi f è costante; affinché la funzione f sia non banale, ci vogliono le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(\ell) = 0$.

³Questo ne segue se $f \in \mathcal{M}_L$.

⁴Tra poco dimostreremo che l'autofunzione $f \in \mathcal{M}_L$ invece di $f \in D(\bar{L})$.

2.1 Funzione di Green

Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.18})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.19})$$

dove $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L , la soluzione del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) nella classe \mathcal{M}_L (e anche nella classe $D(\bar{L})$) è unica. Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1v_1(0) - h_2v_1'(0) = 0, \quad H_1v_2(\ell) + H_2v_2'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0, \ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (IV.20) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (IV.19). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Siccome $(pw)'(x) \equiv 0$, risulta l'identità

$$p(x)w(x) \equiv p(0)w(0), \quad x \in [0, \ell]. \quad (\text{IV.21})$$

Cercheremo la soluzione del problema (IV.18)-(IV.19) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (\text{IV.22})$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (IV.21), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \quad c_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \quad (\text{IV.24})$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (IV.19), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y) v_2(y) dy - \frac{v_2(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y) v_1(y) dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) - \frac{v_1'(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y) v_2(y) dy \\ &\quad - \frac{v_2'(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y) v_1(y) dy. \end{aligned}$$

Tenendo conto dalle condizioni (IV.20), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_1 [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)]; \\ 0 &= H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 [H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell)], \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (\text{IV.25})$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ v_2(x)v_1(y), & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) o dell'operatore L . Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} = -\frac{w(x)}{p(0)w(0)} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, \ell). \quad (\text{IV.27})$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L_2(0, \ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(0, \ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad \mathcal{M}_L per ogni $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$, il dominio \mathcal{M}_L è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G . Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L_2(0, \ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L , Infatti, $\bar{L} = G^{-1}$.

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.18)-(IV.19), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (IV.18)-(IV.19) nella forma equivalente

$$(L - \mu I)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.28})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu) [f - \mu u].$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y) dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (\text{IV.30})$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L [o di $L - \mu I$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio IV.3 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \quad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \quad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1 \ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [h_1 x + x_2] [H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [H_1(\ell - x) + H_2] [h_1 y + h_2], & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (IV.20), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2 \sqrt{\lambda} \cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0, \lambda)v_2'(0, \lambda) - v_1'(0, \lambda)v_2(0, \lambda) \\ &= \sqrt{\lambda} \left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1) \sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2) \sqrt{\lambda} \cos(\ell\sqrt{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, & u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad [\text{Dirichlet}] \\ n = 0, 1, 2, \dots, & u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad [\text{Neumann}] \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione trascendente⁵

$$\cotg(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n} \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

2.2 Riduzione ad un'equazione integrale

Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema IV.4 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in D(\bar{L}), \quad f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell), \quad (\text{IV.31})$$

⁵Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\text{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L_2(0, \ell), \quad (\text{IV.32})$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L . Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.31) e (IV.32) appartengono ad \mathcal{M}_L .

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.31), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.32).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L_2(0, \ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.32). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$ e $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0, \ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0, \ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0, \ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0, \ell]$. Inoltre, dalla (IV.20) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (IV.17). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. \square

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\bar{L})$) appartiene ad \mathcal{M}_L . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0, \ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (\text{IV.33})$$

in $C[0, \ell]$ oppure in $L_2(0, \ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L .

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (\text{IV.34})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.35})$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (IV.16)-(IV.17) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y) u(y) dy, \quad (\text{IV.36})$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1 .

2.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (IV.36) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x, y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (IV.16)-(IV.17) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare⁶ *l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a $C^2[0, \ell]$.*

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

- 1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo $[q_{\min}, \infty)$ dove $q_{\min} = \min_{x \in [0, \ell]} q(x)$.*

Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min} \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

⁶Sfruttiamo il fatto che il corrispondente operatore integrale K è compatto e autoaggiunto su $L^2(G)$. Ciò si deve alla stima $\int_G \int_G |\mathcal{G}_1(x, y)|^2 dx dy < +\infty$.

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u , allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda \|u\|_2^2 = (Lu, u) \geq q_{\min} \|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

- 2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenerare:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + 1}, \quad (\text{IV.37})$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulterebbe una contraddizione con la (IV.27):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in (0, \ell).$$

- 3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u soddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (IV.20) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce uno sottospazio di $L_2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 è unidimensionale.

Le condizioni al contorno (IV.17) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]_0^\ell.$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (IV.17). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)} u(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u(\ell), \quad \sqrt{p(0)} u'(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u'(\ell),$$

per la u e per la v , dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio \mathcal{M}_L ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 1, \quad u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = -u(\ell), \quad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell} \right)^2, & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = c_1 \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \right) + c_2 \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L_2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L_2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (\text{IV.38})$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Esempio IV.5 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\frac{2n\pi}{\ell} \right)^2, \\ \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}, & \varphi_n^c(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right), \quad \varphi_n^s(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Per $f \in L_2(0, \ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right) + b_n \sin \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

3 Problemi di Sturm-Liouville singolari

Finora ci siamo limitati ai problemi di Sturm-Liouville detti *regolari*. Ciò vuol dire che l'equazione differenziale ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.39})$$

dove $p \in C^1[0, \ell]$ è strettamente positiva (anche agli estremi dell'intervallo $[0, \ell]$) e $q \in C[0, \ell]$ è una funzione reale. Nelle applicazioni appaiono, purtroppo, problemi di Sturm-Liouville in cui la funzione p è positiva all'interno dell'intervallo $(0, \ell)$ e si annulla ad uno (o ambedue) degli estremi. Esistono anche applicazioni importanti in cui l'intervallo è illimitato. Tali problemi di Sturm-Liouville si dicono *singolari*.

La teoria dei problemi di Sturm-Liouville singolari è stata principalmente sviluppata da Weyl (1908). L'esistenza di uno zero della p all'estremo $x = 0$ implica l'impossibilità di convertire l'equazione differenziale in un'equazione della forma $y'' + \dots = 0$ con condizioni iniziali di tipo $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. Ciò compromette in modo serio la costruzione della funzione di Green e la conversione del problema di Sturm-Liouville in un'equazione integrale con nucleo hermitiano. Un'altra difficoltà è la descrizione delle condizioni al contorno che conducono ad un operatore autoaggiunto e quindi ad una teoria spettrale. La terza difficoltà consiste nella possibilità dell'esistenza di spettro continuo. Ciò capita in particolare per l'equazione di Schrödinger radiale con potenziale che tende a zero se $|x| \rightarrow \infty$, per cui \mathbb{R}^+ è lo spettro continuo dell'operatore di Sturm-Liouville. Tutto quanto vuol dire che non c'è alcuna speranza di una teoria generale. Invece bisogna trattare le applicazioni in modo ad hoc.

Esempio IV.6 Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (\text{IV.40})$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (\text{IV.41})$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia \mathcal{M}_{L_ν} l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0, 1]) \cap L^2((0, 1); x dx)$ che soddisfano alle condizioni al contorno (IV.41) e la condizione $x^{-1/2} L_\nu u \in L^2(0, 1)$. Quest'insieme è denso nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$ in cui verrà studiato il problema al contorno.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L^2(0, 1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned} (L_\nu u, u) &= - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x |u'|^2 dx - [xu' \bar{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x |u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia autovalore dell'operatore L_ν , è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplici. Discutiamo ora il caso $\lambda > 0$. In tal caso le uniche soluzioni della (IV.40) limitate per $x \rightarrow 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Una tale soluzione soddisfa la condizione (IV.41) se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (II.43). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

Per $\nu = 0$ le funzioni $v_1(x) = 1$ e $v_2(x) = \beta - \alpha \log(x)$ soddisfano all'equazione (IV.40) e, rispettivamente, alla prima e alla seconda condizione (IV.41). Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale $L_0 u \equiv -(xu')' = xf(x)$ hanno la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x), \quad (\text{IV.42})$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.43})$$

Sia $\alpha > 0$ (cioè, escludiamo la condizione di Neumann in $x = 1$). Dunque $c_1'(x) = [\log(x) - \frac{\beta}{\alpha}]xf(x)$ e $c_2'(x) = xf(x)/\alpha$. Quindi

$$c_1(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 - \frac{1}{\alpha} \int_x^1 yf(y) dy.$$

Siccome

$$u(x) = \left(-\alpha c_2 + \int_0^1 y f(y) dy \right) \log(x) + c_1 + \beta c_2 \\ + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy - \frac{\beta}{\alpha} \int_x^1 y f(y) dy - (\log x) \int_0^x y f(y) dy,$$

si ha $c_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y f(y) dy$, e dunque

$$u(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy - \left[\log(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right] \int_0^x y f(y) dy.$$

La seconda condizione

$$0 = u(1) + \frac{\beta}{\alpha} u'(1) = c_1 + \int_0^1 \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy$$

ci dà la costante c_1 . Infine

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy, \quad (\text{IV.44})$$

dove la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{\beta}{\alpha} - \log \max(x, y) > 0.$$

Quindi il problema (IV.40)-(IV.41) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) - \lambda \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) u(y) y dy = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy,$$

da risolvere nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$. Per $\nu > 0$ l'espressione esatta della funzione di Green si trova in [3].

Esempio IV.7 Consideriamo ora il problema al contorno

$$Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.45})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda (distribuzionale) $u'' \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $v_1(x) = e^{\mu x}$ e $v_2(x) = e^{-\mu x}$ soddisfano all'equazione $v_j'' + \mu^2 v_j = 0$ per $j = 1, 2$. Le soluzioni dell'equazione $Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = f$ hanno tutte la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}.$$

Quindi $c_1'(x) = -e^{-\mu x} f(x)/2\mu$ e $c_2'(x) = e^{\mu x} f(x)/2\mu$. Di conseguenza,

$$c_1(x) = c_1 + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{-\mu y} f(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{\mu y} f(y) dy.$$

Dunque

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.46})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R})$, ci vuole $c_1 = c_2 = 0$. Quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.47})$$

Si osservi che $\mathcal{G}(x, y) = e^{-\mu|x-y|}/2\mu$ prende il posto della funzione di Green.

Esempio IV.8 Consideriamo ora il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = 0, & \text{Dirichlet,} \\ u'(0) = 0, & \text{Neumann,} \\ (\cos \alpha)u(0) - (\sin \alpha)u'(0) = 0, & \text{Condizione mista,} \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda⁷ $u'' \in L^2(\mathbb{R}^*)$ e $(\cos \alpha)u(0) = (\sin \alpha)u'(0)$. Seguendo il metodo dell'esempio precedente troviamo al posto della (IV.46)

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.49})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, ci vuole $c_1 = 0$. Quindi

$$u(x) = c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.50})$$

⁷Si intende la derivata seconda distribuzionale.

Ora sostituiamo la condizione al contorno in $x = 0$. Il risultato finale è

$$\begin{aligned}
 & u(x) \\
 = & \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy - \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Dirichlet,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Neumann,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + F(\mu, \alpha) \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{mista,} \end{cases} \\
 & \hspace{20em} \text{(IV.51)}
 \end{aligned}$$

dove

$$F(\mu, \alpha) = \frac{\mu \sin \alpha - \cos \alpha}{2\mu[\mu \sin \alpha + \cos \alpha]}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(x, y) &= \frac{e^{-\mu|x-y|} + 2\mu F(\mu, \alpha) e^{-\mu(x+y)}}{2\mu} \\
 &= \frac{\mu \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Neumann}}(x, y) + \frac{\cos \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Dirichlet}}(x, y)
 \end{aligned}$$

prende il posto della funzione di Green.

Capitolo V

TEORIA DEI GRUPPI

0 Introduzione

In meccanica razionale la simmetria di un sistema fisico conduce alle leggi di conservazione. La conservazione del momento angolare segue direttamente dalla simmetria rotazionale, cioè dall'invarianza del sistema sotto opportune rotazioni. Le operazioni di simmetria costituiscono un cosiddetto gruppo. La teoria dei gruppi fornisce il contesto matematico per trattare gli invarianti e le simmetrie di un sistema fisico. In fisica lo sono stati Wigner ed altri ad introdurre i gruppi. In geometria Klein ed altri hanno introdotto i gruppi per descrivere gli invarianti e le simmetrie di un sistema geometrico.

La teoria dei gruppi finiti (anche detti gruppi discreti) è fondamentale per capire le simmetrie in un cristallo, dove c'è simmetria rotazionale soltanto per un numero finito di rotazioni. Di recente questa teoria ha condotto ad una classificazione completa di tutti i gruppi finiti.

Se le rotazioni dipendono da vari angoli in modo continuo, i gruppi di rotazioni hanno infiniti elementi, mentre quest'ultimi hanno opportune proprietà metriche e topologiche. In tal caso la teoria dei gruppi di Lie (anche detti gruppi continui) è fondamentale per capire le simmetrie.

1 Gruppi Astratti

In algebra astratta si definisce un *gruppo* come un insieme G di elementi (di oggetti, operazioni, trasformazioni, matrici, ecc.) che si possono moltiplicare costituendo una trasformazione prodotto $(a, b) \mapsto ab$, da $G \times G$ in G , che soddisfa le seguenti condizioni:

- (1) (*associatività*): $(ab)c = a(bc)$ per tutti gli $a, b, c \in G$;

- (2) esiste un elemento neutrale $e \in G$ tale che $ae = ea = a$ per ogni $a \in G$;¹
 (3) per ogni $a \in G$ esiste un elemento inverso $a^{-1} \in G$ tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.²

Se vale la

- (4) (*commutatività*) $ab = ba$ per tutti gli $a, b \in G$,

allora G si dice *gruppo abeliano*.³ L'elemento neutrale e viene spesso scritto come 1.

Spesso, in particolare se vale la commutatività (4), l'operazione è un'addizione, si scrivono $a + b$, $-a$ e 0 al posto di ab , a^{-1} e 1, e il gruppo si dice additivo.⁴ Invece di (1)-(4) abbiamo ora:

- (1)_a (*associatività*) $(a + b)_c = a + (b + c)$ per tutti gli $a, b, c \in G$;
 (2)_a esiste un elemento neutrale $0 \in G$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$ per ogni $a \in G$;
 (3)_a per ogni $a \in G$ esiste un elemento inverso $-a \in G$ tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Se vale la

- (4)_a (*commutatività*) $a + b = b + a$ per tutti gli $a, b \in G$,

allora G si dice *abeliano*. In un gruppo additivo si scrive

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b) = (-b) + a.$$

Esempio V.1 Gli insiemi \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} dei numeri interi, razionali, reali e complessi sono gruppi additivi abeliani rispetto alla solita addizione dei numeri. Per $n \in \mathbb{N}$ gli insiemi \mathbb{Z}^n , \mathbb{Q}^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n dei vettori di n numeri interi, razionali, reali e complessi sono gruppi additivi abeliani rispetto alla solita addizione componente per componente. Gli insiemi $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dei

¹C'è un singolo elemento neutrale. Infatti, se ci fossero due, e_1 e e_2 , allora $e_2 = e_1 e_2 = e_1$, dove la prima uguaglianza segue dal fatto che e_1 è elemento neutrale e la seconda dal fatto che e_2 è elemento neutrale.

²L'elemento $a \in G$ non ha più di un'elemento neutrale. Infatti, se ci fossero due, a_1 e a_2 , allora $a_1 = a_1 e = a_1 (a a_2) = (a_1 a) a_2 = e a_2 = a_2$, dove abbiamo utilizzato la (2) [alla prima e all'ultima uguaglianza], la (3) [alla seconda e quarta uguaglianza] e l'associatività [alla terza uguaglianza].

³Abel e Galois hanno studiato i gruppi di simmetria nello scambiare gli zeri di un polinomio lasciando invarianti i coefficienti.

⁴Un gruppo come sopra si dice moltiplicativo.

numeri razionali, reali e complessi diversi da zero sono gruppi moltiplicativi abeliani rispetto alla solita moltiplicazione dei numeri. Anche l'insieme \mathbb{T} dei numeri complessi di modulo 1 è un gruppo moltiplicativo abeliano rispetto alla moltiplicazione dei numeri.

Esempio V.2 Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Allora gli insiemi $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ delle matrici reali non singolari, matrici complesse non singolari, matrici ortogonali, matrici unitarie, matrici ortogonali con determinante uguale ad 1 e matrici unitarie con determinante uguale ad 1, tutte di ordine n , sono gruppi moltiplicativi non abeliani rispetto al solito prodotto delle matrici. L'unico caso in cui il gruppo è abeliano è il caso $SO(2)$, dove tutti gli elementi hanno la forma

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

dove $\varphi \in \mathbb{R}$. Grazie alla periodicità di $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ esiste una corrispondenza biunivoca $e^{i\varphi} \leftrightarrow R(\varphi)$ tra i punti del cerchio unitario \mathbb{T} e gli elementi di $SO(2)$ tale che $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ corrisponde a $R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi)$. Quindi dal punto di vista dell'algebra astratta i gruppi $SO(2)$ e \mathbb{T} sono isomorfi.

Esempio V.3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme \mathbb{Z}_n di tutti i numeri interi modulo n (dove due interi m_1 e m_2 vengono identificati se $m_1 - m_2$ è divisibile da n , cioè se m_1 e m_2 hanno lo stesso resto al dividere da n) è un gruppo additivo abeliano **finito**. Quest'insieme ha soltanto n elementi caratterizzati dalle classi (inglese: residue classes) $0, 1, \dots, n-1$. La tabella di addizione commutativa è la seguente (tracciata per $n \geq 6$):

	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$
0	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$
1	1	2	3	...	$n-1$	0
2	2	3	4	...	0	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n-2$	$n-2$	$n-1$	0	...	$n-4$	$n-3$
$n-1$	$n-1$	0	1	...	$n-3$	$n-2$

Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di \mathbb{Z}_n e le radici dell'unità di grado n (cioè, gli zeri dell'equazione $z^n = 1$) tale che $m \pmod n$ corrisponde a $e^{2\pi im} = \cos(2\pi m) + i \sin(2\pi m)$. Quindi dal punto di visto dell'algebra astratta il gruppo additivo \mathbb{Z}_n è isomorfo al gruppo moltiplicativo delle radici dell'unità di grado n .

Esempio V.4 Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme S_n di tutte le $n!$ permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ è un gruppo moltiplicativo rispetto all'applicazione successiva (oppure al prodotto di composizione) di due permutazioni. Questo gruppo è non abeliano per $n \geq 3$. Per esempio, per $n = 3$ abbiamo le seguenti 6 permutazioni:

$$\begin{aligned}
 (1, 2, 3) &\mapsto (1, 2, 3) && \text{identità} \\
 (1, 2, 3) &\mapsto (1, 3, 2) && \text{trasposizione (23)} \\
 (1, 2, 3) &\mapsto (3, 2, 1) && \text{trasposizione (13)} \\
 (1, 2, 3) &\mapsto (2, 1, 3) && \text{trasposizione (12)} \\
 (1, 2, 3) &\mapsto (2, 3, 1) && \text{3-cycle (123)} \\
 (1, 2, 3) &\mapsto (3, 1, 2) && \text{3-cycle (132)}
 \end{aligned}$$

Applicando prima la permutazione orizzontale e poi quella verticale arriviamo alla seguente tabella di moltiplicazione (dove (1) è l'identità):

(1)	(1)	(23)	(13)	(12)	(123)	(132)
(1)	(1)	(23)	(13)	(12)	(123)	(132)
(23)	(23)	(1)	(123)	(132)	(13)	(12)
(13)	(13)	(132)	(1)	(123)	(12)	(23)
(12)	(12)	(123)	(132)	(1)	(23)	(13)
(123)	(123)	(12)	(23)	(13)	(132)	(1)
(132)	(132)	(13)	(12)	(23)	(1)	(123)

Esempio V.5 Data una matrice quadrata A , si definisce il gruppo generato da A dalla formula

$$\mathcal{G}_A = \{e^{tA} : t \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j,$$

essendo totalmente convergente la serie e A^0 la matrice identità. Se e^{tA} non è mai uguale alla matrice identità per un'opportuna $t > 0$, allora il gruppo sarà isomorfo al gruppo additivo \mathbb{R} dei numeri reali rispetto all'addizione dei numeri. Se $e^{\tau A}$ è uguale alla matrice identità per $\tau > 0$ ma diversa dalla matrice identità per $t \in (0, \tau)$, allora la trasformazione

$$\exp\left(\frac{2\pi\tau}{\tau_0}i\right) \mapsto e^{tA}$$

costituisce una corrispondenza biunivoca tra il cerchio unitario \mathbb{T} e il gruppo \mathcal{G}_A tale che il prodotto di due numeri in \mathbb{T} corrisponde al prodotto delle corrispondenti matrici in \mathcal{G}_A . Ovviamente \mathcal{G}_A è un gruppo moltiplicativo abeliano.

Si noti che la matrice $R(\varphi)$ dell'esempio V.2 coincide con il matrice $e^{\varphi A}$ se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$SO(2) = \mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (\text{V.1})$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se $A^n = 0$ mentre $A^j \neq 0$ per $j = 1, 2, \dots, n-1$, allora

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} A^j.$$

In particolare,

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esempio V.6 Sia $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Allora $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu})$ rappresenta il tensore metrico della relatività speciale. Allora il gruppo di Lorentz consiste in tutte le matrici reali $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3$ di ordine 4 per cui

$$A^T G A = G \quad \text{oppure} \quad \sum_{\rho=0}^3 g_{\rho\rho} a_{\rho\mu} a_{\rho\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{per } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Siccome $a_{00}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 1$, si ha $a_{00} \geq 1$ oppure $a_{00} \leq -1$. D'altra parte, siccome $\det G = -1$, abbiamo per ogni A appartenente al gruppo di Lorentz

$$-(\det A)^2 = \det(A^T) \det G \det A = \det G = -1,$$

e quindi $\det A = \pm 1$. Quindi il gruppo di Lorentz ha i seguenti sottogruppi:

- (a) $\text{Lor} \times \{I, -I, G, -G\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G\}$;
- (b) $\text{Lor} \times \{I, G\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G, \det A = 1\}$;
- (c) $\text{Lor} \times \{I, -I\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G, a_{00} \geq 1\}$;

(d) $\text{Lor} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G, \det A = 1, a_{00} \geq 1\}$.

Come trasformazioni di Lorentz si intendono quelle appartenenti al gruppo più piccolo Lor.

Siano G_1 e G_2 due gruppi moltiplicativi. Allora un *omomorfismo* è una funzione $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ tale che

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G_1.$$

Un omomorfismo di gruppi si dice

- (a) *monomorfismo* se $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ implica $g_1 = g_2$;
- (b) *epimorfismo* se per ogni $g_2 \in G_2$ esiste almeno uno $g_1 \in G_1$ tale che $\varphi(g_1) = g_2$;
- (c) *isomorfismo* se per ogni $g_2 \in G_2$ esiste esattamente uno $g_1 \in G_1$ tale che $\varphi(g_1) = g_2$. In altre parole: se è monomorfismo e epimorfismo. In tal caso $\varphi^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ è anche un isomorfismo.
- (d) *automorfismo* se $G_1 = G_2$ e φ è isomorfismo. Gli automorfismi su un gruppo moltiplicativo G costituiscono un gruppo $\text{Aut}(G)$ rispetto al prodotto di composizione.

Negli esempi precedenti abbiamo visto alcuni esempi di isomorfismi dei gruppi. Per esempio, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow SO(2)$,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

è un isomorfismo. La trasformazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{T}$,

$$\varphi(m) = e^{2\pi i m},$$

è un omomorfismo; tra \mathbb{Z}_n e il gruppo delle radici di unità di grado n è un isomorfismo.

Sia G un gruppo moltiplicativo. Allora H si dice *sottogruppo* di G se H è un sottoinsieme di G che è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione di G . Si vede facilmente che un sottoinsieme H di G è un sottogruppo di G se

- (a) $ab \in H$ per tutti gli $a, b \in H$;
- (b) $a^{-1} \in H$ per $a \in H$.

Se $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ è un omomorfismo di gruppi, allora

$$\text{Im } \varphi = \{\gamma(g) : g \in G_1\}$$

e

$$\text{Ker } \varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$$

sono sottogruppi di G_2 e G_1 , rispettivamente.

Sia G un gruppo moltiplicativo con sottogruppo H . È facile dimostrare che per ogni $g \in G$

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$$

è un sottogruppo di G . Infatti, se gh_1g^{-1} e gh_2g^{-1} appartengono ad H , allora $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}$, poichè $h_1h_2 \in H$. Un sottogruppo H di G si dice *sottogruppo normale* se

$$gHg^{-1} = H, \quad g \in G.$$

Quest'ultimo equivale a richiedere che

$$gH = \{gh : h \in H\} = \{hg : h \in H\} = Hg.$$

Se G è abeliano, ovviamente, per commutatività, $gHg^{-1} = H$ per ogni $g \in G$. Dunque se G è abeliano, tutti i suoi sottogruppi sono normali.

Se N è un sottogruppo normale di G , allora si possono identificare due elementi $g_1, g_2 \in G$ se $g_1g_2^{-1} \in N$: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in N$. Ovviamente $g \sim g$ per ogni $g \in N$, poichè $e = gg^{-1} \in N$ per ogni $g \in G$. Anche: se $g_1 \sim g_2$ e quindi $g_1g_2^{-1} \in N$, allora $g_2g_1^{-1} = (g_1g_2^{-1})^{-1} \in N$ e $g_2 \sim g_1$. Infine se $g_1 \sim g_2$ e $g_2 \sim g_3$, dunque se $g_1g_2^{-1} \in N$ e $g_2g_3^{-1} \in N$, allora $g_1g_3^{-1} = (g_1g_2^{-1})(g_2g_3^{-1}) \in N$ e quindi $g_1 \sim g_3$. Di conseguenza, possiamo suddividere G in cosiddette classi di equivalenza $C_k = \{g \in G : g \sim k\}$. Ponendo G/N come l'insieme di tutte le classi di equivalenza, G/N è un gruppo rispetto all'operazione prodotto

$$C_{g_1}C_{g_2} = C_{g_1g_2},$$

dove utilizziamo che $g_1g_2 \sim \hat{g}_1\hat{g}_2$ se $g_1 \sim \hat{g}_1$ e $g_2 \sim \hat{g}_2$.⁵ Il gruppo G/N si dice *gruppo quoziente*.

Se G è un gruppo finito (cioè, se G ha un numero finito, $\#G$, di elementi), allora

$$\#G = (\#N)(\#[G/N]).$$

⁵Dim: $\hat{g}_1\hat{g}_2(g_1g_2)^{-1} = \hat{g}_1(\hat{g}_2g_2^{-1})g_1^{-1} \in g_1Ng_1^{-1} = N$. Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato in modo essenziale che N è un sottogruppo *normale*.

In altre parole, l'*ordine* (cioè, il numero degli elementi) di un sottogruppo normale di un gruppo finito G è un divisore dell'ordine di G . Questa proprietà vale per qualsiasi sottogruppo, non soltanto per quelli normali.

Siano G e H due gruppi moltiplicativi e sia $\varphi : G \rightarrow H$ un epimorfismo. Si dimostra facilmente che $H = \text{Im } \varphi$ e che $\text{Ker } \varphi$ è un sottogruppo normale di G . Sia $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker } \varphi$ la trasformazione $\pi(g) = C_g$, un epimorfismo. Allora la trasformazione $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ definita da $\psi(C_g) \mapsto \varphi(g)$ è un isomorfismo da $G/\text{Ker } \varphi$ in $\text{Im } \varphi$.

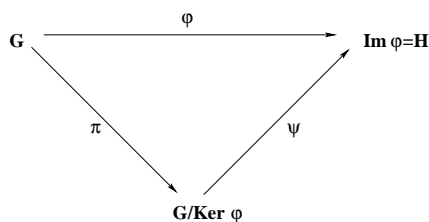


Figura V.1: Siano $\varphi : G \rightarrow \text{Im } \varphi = H$ un epimorfismo e $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker } \varphi$ la proiezione naturale che manda g in $\{\hat{g} \in G : \hat{g} \sim g\}$. Allora $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ è un isomorfismo.

Esempio V.7 Nel gruppo S_n delle permutazioni dell'insieme di n oggetti $\{1, \dots, n\}$ (vedi l'esempio V.4) l'insieme di tutte le permutazioni pari⁶ A_n è un sottogruppo normale di S_n per $n \geq 3$. Per $n \geq 5$ il gruppo S_n non ha altri sottogruppi normali non banali. Per $n = 3$ si ha $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$.

Esempio V.8 I sottogruppi normali del gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali non singolari di ordine n sono esattamente i sottogruppi lasciati invarianti dalle similarità $M \mapsto SMS^{-1}$, dove $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Quindi il sottogruppo $SL_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine n con determinante uguale ad 1 è normale (poiché $\det SMS^{-1} = \det M$), ma quello delle matrici ortogonali non lo è.

2 Gruppi Discreti — Gruppi Finiti

Le simmetrie che lasciano invarianti i cristalli hanno due componenti: un componente traslazione che manda un cellula primitiva del cristallo in un'altra

⁶Ogni permutazione è un prodotto di trasposizioni. Si dice pari/dispari la permutazione se il numero dei fattori trasposizione nel prodotto è pari/dispari.

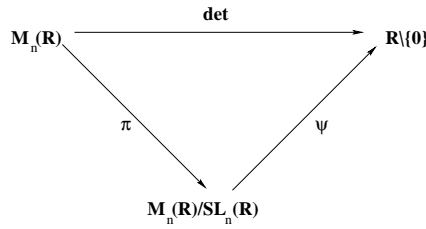


Figura V.2: Siano $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il funzionale determinante e $\pi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ la proiezione naturale che manda una matrice nella classe delle matrici con lo stesso determinante. Allora $\psi : GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un isomorfismo.

cellula primitiva, e un componente rotazione/riflessione. Le rotazioni e riflessioni che lasciano invariati il cristallo vengono descritte dagli elementi di un gruppo finito.

L'esempio principale di un gruppo finito è il *gruppo ciclico* di ordine n , in cui esiste un elemento g tale che $\{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ (con $g^n = 1$) sono gli elementi diversi del gruppo. Una rappresentazione additiva del gruppo ciclico di ordine n è il gruppo \mathbb{Z}_n dell'esempio V.3. Una rappresentazione moltiplicativa del gruppo ciclico di ordine n è il gruppo moltiplicativo delle radici dell'unità di ordine n : $\{e^{2\pi ik/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ oppure il gruppo delle rotazioni successive intorno all'origine da un multiplo di $2\pi/n$.

Il gruppo ciclico di ordine 4 viene spesso scritto C_4 . In due impostazioni diversi la sua tabella di moltiplicazione è:

C_4	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

C_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Al contrario, il *gruppo di Klein* ha una delle seguenti tabelle:

\mathbf{V}_4	1	V_1	V_2	V_3
1	1	V_1	V_2	V_3
V_1	V_1	1	V_3	V_2
V_2	V_2	V_3	1	V_1
V_3	V_3	V_2	V_1	1

\mathbf{V}_4	1	R_x	R_y	R_z
1	1	R_x	R_y	R_z
R_x	R_x	1	R_z	R_y
R_y	R_y	R_z	1	R_x
R_z	R_z	R_y	R_x	1

In questo gruppo ogni elemento ha l'identità 1 come il suo quadrato. Quindi \mathbf{V}_4 non è isomorfo a C_4 .

Studiando le simmetrie di un triangolo equilatero dobbiamo considerare le rotazioni per gli angoli $2\pi/2$ e $4\pi/3$, la riflessione rispetto all'asse x e tutte le combinazioni, risultando nel gruppo non abeliano D_3 di ordine 6 con i seguenti elementi:⁷ Quindi il

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La sua tabella di moltiplicazione è la seguente:

D_3	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	E	C	D
B	B	1	A	D	E	C
C	C	D	E	1	A	B
D	D	E	C	B	1	A
E	E	C	D	A	B	1

Osserviamo che D_3 , con il fattore sinistro nella direzione verticale e quello destro nella direzione orizzontale, è isomorfo al gruppo S_3 dell'esempio V.4. L'unico gruppo di ordine 6 non isomorfo a D_3 è il gruppo ciclico C_6 .

Il gruppo D_4 non abeliano contiene le 4 rotazioni antiorarie per $k\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, 3$; $c^4 = e$), le riflessioni rispetto alle rette OX (chiamata b), OY , AC e BD e tutte le combinazioni; in tutto, 8 elementi $e, c, c^2, c^3, b, bc, bc^2$ e bc^3 , dove $cb = bc^3$, $c^2b = bc^2$, $c^3b = bc$ e $(bc^k)^2 = e$ per $k = 0, 1, 2, 3$. La sua tabella di moltiplicazione (con fattore sinistro verticale e fattore destro orizzontale) è come segue:

⁷Si noti che $CD = A$ e $DC = B$.

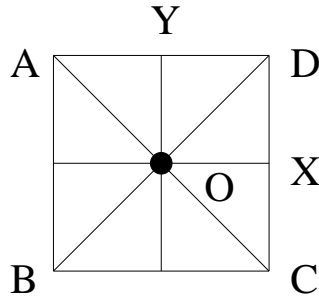


Figura V.3: Il gruppo diedrale D_4 descrive le simmetrie del quadrato $ABCD$, composto dalle rotazioni antiorarie e, c, c^2, c^3 , le riflessioni rispetto alle rette OX, OY, AC e AD , e tutte le combinazioni.

	e	c	c^2	c^3	b	bc	bc^2	bc^3
e	e	c	c^2	c^3	b	bc	bc^2	bc^3
c	c	c^2	c^3	e	bc^3	b	bc	bc^2
c^2	c^2	c^3	e	c	bc^2	bc^3	b	bc
c^3	c^3	e	c	c^2	bc	bc^2	bc^3	b
b	b	bc	bc^2	bc^3	e	c	c^2	bc^3
bc	bc	bc^2	bc^3	b	c^3	e	c	c^2
bc^2	bc^2	bc^3	b	bc	c^2	c^3	e	c
bc^3	bc^3	b	bc	bc^2	c	c^2	c^3	e

Il gruppo diedrale D_n delle simmetrie di un poligono regolare con n vertici è composto dalle rotazioni antiorarie c^k per gli angoli $2k\pi/n$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$), la riflessione b rispetto ad una retta che passa per una vertice e il centro del poligono, e tutte le combinazioni $bc^k = c^{n-k}b$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$; $(bc^k)^2 = b^2 = e$). Il gruppo D_n ha $2n$ elementi ed è non abeliano. Per poter tassellare il piano completamente da poligoni regolari bisogna richiedere che $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Per i gruppi discreti discussi finora viene lasciato invariante l'origine. Se facciamo il conteggio arriviamo a 32 gruppi (inglese: point groups) non isomorfi. Se aggiungiamo la possibilità della traslazione lasciando invariante il cristallo, arriviamo a 230 gruppi non isomorfi (inglese: space groups).

3 Gruppi Continui — Gruppi di Lie

1. Algebre di Lie. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, rispetto agli scalari in $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o in $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora V si dice *algebra di Lie* se in V viene anche definita un'operazione bilineare $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, il cosiddetto *bracket di Lie*, con le seguenti proprietà:

(a) (*antisimmetria*) $[x, y] = -[y, x]$ per tutti gli $x, y \in V$;

(b) (*identità di Jacobi*)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad x, y, z \in V.$$

Per esempio, tutti gli spazi vettoriali di matrici reali o complesse $n \times n$ sono algebre di Lie rispetto al bracket *commutatore*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Un altro esempio viene fornito dallo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con prodotto vettore

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Un sottospazio lineare W dell'algebra di Lie V è detto *sottoalgebra di Lie* di V se $[x, y] \in W$ per tutti gli $x, y \in W$, e *ideale di Lie* di V se $[x, z] \in W$ per ogni $x \in W$ e $z \in V$. Un esempio importante di un ideale di Lie di V è il *centro*

$$Z(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in V : [x, z] = 0 \text{ per ogni } z \in V\}.$$

Si dice *omomorfismo di Lie* una trasformazione $\Phi : V \rightarrow W$ tra algebre di Lie che è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriale V e W e soddisfa

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = \Phi([x, y]), \quad x, y \in V.$$

Un omomorfismo di Lie biunivoco si chiama un *isomorfismo di Lie*.

b. Algebra di Lie di un gruppo di matrici. Sia G un gruppo di matrici $n \times n$ rispetto al solito prodotto di matrici. Allora è detto *spazio tangente alla matrice identità* oppure *algebra di Lie* di G lo spazio vettoriale reale $\mathfrak{g} = TG$ composto delle derivate $\gamma'(t=0)$ di tutte le curve derivabili $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ tali che $\gamma(0)$ è la matrice identità. Quindi per ogni curva derivabile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ con $\gamma(0)$ la matrice identità I si ha

$$\gamma(t) = I + t\gamma'(0) + o(t), \quad t \rightarrow 0,$$

e le derivate $\gamma'(0)$ costituiscono gli elementi dell'algebra di Lie di G .⁸ È detta *dimensione* del gruppo G la **dimensione reale** dello spazio vettoriale $\mathfrak{g} = TG$.

Per calcolare le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici è cruciale la seguente identità.

⁸Il bracket di Lie di $\mathfrak{g} = TG$ è sempre il commutatore.

Lemma V.9 Per ogni matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ di ordine n si ha

$$\det e^A = \exp(\operatorname{Tr} A),$$

dove $\operatorname{Tr} A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ è la somma degli autovalori di A .

Dimostrazione. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A , allora $\exp(\lambda_i)$ ($i = 1, \dots, n$) sono gli autovalori di e^A . Il lemma segue dal fatto che il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori. \square

Esempio V.10 Calcoliamo ora le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici.

- (a) Sia $G = GL_n(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali non singolari. Allora $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} TGL_n(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine n . Infatti, per dimostrare che $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ basta definire $\gamma(t) = e^{tA}$ e osservare che $\gamma'(0) = A$. Ovviamente $\dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2$.
- (b) Se $G = GL_n(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse non singolari di ordine n , allora $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} TGL_n(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine n . Ovviamente $\dim GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2$.
- (c) Se $G = SL_n(\mathbb{R})$ è il gruppo di tutte le matrici reali con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} TSL_n(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine n e traccia zero. Quindi $\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.
- (d) Se $G = SL_n(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} TSL_n(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine n e traccia zero. Quindi $\dim SL_n(\mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.
- (e) Se $G = SO(n)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{so}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TSO(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ($A^T = -A$) di ordine n . Siccome una matrice reale e antisimmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ soddisfa $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$, abbiamo $\dim SO(n) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$.
- (f) Se $G = SU(n)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{su}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TSU(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$ e $\operatorname{Tr} A = 0$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrice sono numeri immaginari con somma zero, abbiamo $\dim SU(n) = 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] + (n-1) = n^2 - 1$.
- (g) Se $G = O(n)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali di ordine n , allora $\mathfrak{o}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TO(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche ($A^T = -A$) di ordine n . Abbiamo $\dim O(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

(h) Se $G = U(n)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie, allora $\mathfrak{u}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TU(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari, abbiamo $\dim U(n) = 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] + n = n(n-1) + n = n^2$.

(i) Se $G = \text{Lor} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G, \det A = 1, a_{00} \geq 1\}$ è il gruppo di Lorentz, allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{lor} &= \{A \in M_4(\mathbb{R}) : G A G = -A^T\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : (G A)^T = -G A\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{01}, a_{03}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi $\dim \text{Lor} = 6$.

Ad ogni gruppo di Lie G si possono associare $\dim G$ generatori: Una base qualsiasi $\{S_i : i = 1, 2, \dots, \dim G\}$ dell'algebra di Lie \mathfrak{g} (considerato come spazio vettoriale reale) si dice sistema di *generatori* di G . Siccome i commutatori $[S_i, S_j]$ appartengono all'algebra di Lie \mathfrak{g} , si ha la *relazione di chiusura* (inglese: closure relation)

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^{\dim G} c_{ij}^k S_k$$

per opportune *costanti di struttura* (inglese: structure constants) reali del gruppo G . Dall'antisimmetria del commutatore segue l'antisimmetria

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \quad (\text{V.2})$$

Applicando l'identità di Jacobi

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0$$

segue

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^{\dim G} (c_{ij}^m [S_m, S_k] + c_{jk}^m [S_m, S_i] + c_{ki}^m [S_m, S_j]) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\dim G} (c_{ij}^m c_{mk}^n S_n + c_{jk}^m c_{mi}^n S_n + c_{ki}^m c_{mj}^n S_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\dim G} \sum_{m=1}^{\dim G} (c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n) S_n. \end{aligned}$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori S_n segue la relazione

$$\sum_{m=1}^{\dim G} (c_{ij}^m c_{mk}^m + c_{jk}^m c_{mi}^m + c_{ki}^m c_{mj}^m) = 0. \quad (\text{V.3})$$

c. Alcuni esempi dettagliati. $SO(2)$. Consideriamo ora il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali di ordine 2 con determinante uguale ad 1. Allora $SO(2)$ ha la forma (V.1) e la sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$ è composta da tutte le matrici reali antisimmetriche, cioè

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ic\sigma_2 : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

mentre $SO(2)$ è un gruppo di Lie che dipende da un singolo parametro t :

$$SO(2) = \{R(t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{it\sigma_2}.$$

La matrice di Pauli σ_2 si dice *generatore* di $SO(2)$.

$SO(3)$. L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ del gruppo $SO(3)$ delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante uguale ad 1 consiste nelle matrici reali e antisimmetriche. Quindi

$$\mathfrak{so}(3) = \{i[c_1 S_x + c_2 S_y + c_3 S_z] : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{V.4})$$

costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ e si dicono *generatori* di $SO(3)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} SO(3) &= \{R_x(\psi_1)R_y(\theta_1)R_z(\varphi_1) : \psi_1, \theta_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_x(\psi_2)R_z(\varphi_2)R_y(\theta_2) : \psi_2, \theta_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_3)R_x(\psi_3)R_z(\varphi_3) : \psi_3, \theta_3, \varphi_3 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_4)R_z(\varphi_4)R_x(\psi_4) : \psi_4, \theta_4, \varphi_4 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_5)R_x(\psi_5)R_y(\theta_5) : \psi_5, \theta_5, \varphi_5 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_6)R_y(\theta_6)R_x(\psi_6) : \psi_6, \theta_6, \varphi_6 \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

In queste espressioni $R_x(\psi)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\varphi)$ sono le rotazioni elementari intorno alle assi x, y, z :

$$\begin{aligned} R_x(\psi) &= e^{i\psi S_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) &= e^{i\theta S_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ R_z(\varphi) &= e^{i\varphi S_z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mentre $(\psi_k, \theta_k, \varphi_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sono gli angoli di Eulero della rotazione. Gli angoli di Eulero dipendono dall'ordine in cui le rotazioni elementari vengono applicate per ottenere la rotazione.

Il *tensore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come le costanti di struttura di $SO(3)$ (rispetto al sistema di generatori $\{S_x, S_y, S_z\}$):

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (\text{V.5})$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e⁹

$$\varepsilon_{xyz} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{yzx} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{zyx} = 1.$$

Esempio V.11 Per ogni $g \in SO(3)$ si definisce l'operatore unitario T_g su $L^2(\mathbb{R}^3)$ da

$$(T_g \psi)(x) = \psi(g^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

dove $g^{-1}x \in \mathbb{R}^3$ è un prodotto matrice-vettore colonna. In tal caso

$$(T_g T_h \psi)(x) = (T_h \psi)(g^{-1}x) = \psi(h^{-1}g^{-1}x) = (T_{gh} \psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

tale che $g \mapsto T_g$ è un monomorfismo da $SO(3)$ nel gruppo $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$ degli operatori unitari su $L^2(\mathbb{R}^3)$. Sia A una matrice tale che $iA \in \mathfrak{so}(3)$ e sia $g(t) = e^{itA}$ per $t \in \mathbb{R}$. In tal caso

$$\left. \frac{d}{dt} (T_{g(t)} \psi)(x) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \psi(e^{-itA}x) \right|_{t=0} = -i(Ax) \cdot (\nabla \psi)(x).$$

⁹Si osservi che $[S_x, S_y] = -[S_y, S_x] = iS_z$, $[S_y, S_z] = -[S_z, S_y] = iS_x$ e $[S_z, S_x] = -[S_x, S_z] = iS_y$.

Quindi l'algebra di Lie del gruppo $\{T_g : g \in SO(3)\}$ coincide con lo spazio vettoriale reale di tutti gli operatori $-i(Ax) \cdot \nabla$ su $L^2(\mathbb{R}^3)$ per cui $iA \in \mathfrak{so}(3)$. Di conseguenza,

$$T_{g(t)} = e^{-i(Ax) \cdot \nabla} \text{ dove } iA \in \mathfrak{so}(3).$$

È facile vedere che

$$\begin{aligned} L_x &= -(S_x x) \cdot \hbar \nabla = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_y &= -(S_y y) \cdot \hbar \nabla = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ L_z &= -(S_z z) \cdot \hbar \nabla = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

dove \hbar è la costante di Planck divisa da 2π , sono gli operatori per i momenti angolari nelle direzioni x , y e z . Soddisfano le relazioni

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y.$$

Inoltre $iA \mapsto -i(Ax) \cdot \nabla$ è un monomorfismo di Lie da $\mathfrak{so}(3)$ nell'algebra di Lie di $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$, poichè gli operatori L_x/\hbar , L_y/\hbar e L_z/\hbar hanno le stesse relazioni di commutazione di S_x , S_y e S_z . Di conseguenza, se H è un operatore lineare su $L^2(\mathbb{R}^3)$ che commuta con T_g per ogni $g \in SO(3)$ [per esempio: l'Hamiltoniano $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ per un potenziale centrale (cioè, $V(x) = V(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^3$)], allora H commuta con L_x , L_y e L_z .

SU(2). Il gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\zeta} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} : \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

dove ξ, η, ζ sono i cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Introducendo le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ogni elemento di $SU(2)$ si può scrivere come il prodotto delle tre matrici $U_j(a_j) = \exp(ia_j \sigma_j)$ ($j = 1, 2, 3$), dove $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ dipendono dall'ordine

dei tre fattori. Le tre matrici di Pauli costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(2) &= \{i[a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3] : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

e si dicono *generatori* di $SU(2)$. Una rotazione generale in $SU(2)$ ha la forma

$$\begin{aligned}U(\alpha, \beta, \gamma) &= U_z\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_y\left(\frac{\beta}{2}\right)U_z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{V.7}$$

che coincide con l'espressione nella (V.6) per i parametri di Cayley-Klein $\xi = (\gamma + \alpha)/2$, $\eta = \beta/2$ e $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$.

Il *tensore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come le costanti di struttura di $SU(2)$ (rispetto al sistema di generatori $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$):

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k,\tag{V.8}$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e¹⁰

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = 1.$$

$SU(2) \mapsto SO(3)$. La somiglianza tra le (V.5) e (V.8) suggerisce a collegare i gruppi $SU(2)$ e $SO(3)$ facendo corrispondere le rispettive basi $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e $\{2S_x, 2S_y, 2S_z\}$ delle algebre di Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$, cioè utilizzando la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2i[c_1S_x + c_2S_y + c_3S_z]. \end{cases}$$

Si osservi che questa trasformazione Φ non influisce sui commutatori:

$$[\Phi(A), \Phi(B)] = \Phi([A, B]), \quad A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

¹⁰Si osservi che $[\sigma_1, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_1] = 2i\sigma_3$, $[\sigma_2, \sigma_3] = -[\sigma_3, \sigma_2] = 2i\sigma_1$ e $[\sigma_3, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_3] = 2i\sigma_2$.

Ora costruiamo un omomorfismo di gruppi $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$:

$$\varphi(e^A) = e^{\Phi(A)}, \quad A \in \mathfrak{su}(2). \quad (\text{V.9})$$

Applicando la (V.9) si ha

$$\begin{aligned} e^{it\sigma_1} &= \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_x(2t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \\ e^{it\sigma_2} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_y(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}, \\ e^{it\sigma_3} &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R_z(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si vede subito che φ non è biunivoca, malgrado il fatto che Φ lo è. Il raddoppio dell'angolo da t a $2t$ implica che

$$\varphi(e^{it\sigma_j}) = \varphi(e^{i[t+\pi]\sigma_j}), \quad j = 1, 2, 3.$$

In particolare, calcolando $e^{it\sigma_j}$ per $t = \pi$ (che risulta ad essere uguale a meno la matrice identità) si vede che $\varphi(-I) = I$. L'omomorfismo φ è infatti due a uno: Le matrici $\pm U$ in $SU(2)$ hanno lo stesso immagine sotto φ . Passando ad un gruppo quoziente di $SU(2)$ si ha

$$\frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3).$$

Purtroppo $SU(2)/\{I, -I\}$ non è un gruppo di Lie.

Invece della φ , si può utilizzare la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2i[c_1S_y + c_2S_z + c_3S_x], \end{cases}$$

che conduce ad un altro omomorfismo di Lie $\tilde{\Phi} : SU(2) \rightarrow SO(3)$ che soddisfa $\tilde{\Phi}(e^A) = e^{\tilde{\varphi}(A)}$.

Esempio V.12 In ottica lineare si rappresenta il vettore elettro \vec{E} di un'onda elettromagnetica monocromatica come una combinazione lineare, $\vec{E} = E_l \boldsymbol{\ell} + E_r \boldsymbol{r}$, rispetto a due vettori fissi $\boldsymbol{\ell}$ e \boldsymbol{r} di lunghezza 1 tali che $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\ell}$ punta nella direzione di propagazione dell'onda. Un processo di ottica lineare di tipo

input-output viene descritto dalla *matrice di Jones* (complessa 2×2) \mathbf{J} tale che

$$\begin{pmatrix} E_l \\ E_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{l0} \\ E_{r0} \end{pmatrix}$$

oppure

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{J} \vec{\mathbf{E}}_0.$$

Introducendo i *parametri di Stokes* (reali)

$$\begin{aligned} I &= E_l E_l^* + E_r E_r^*, & (\text{intensità}) \\ Q &= E_l E_l^* - E_r E_r^*, \\ U &= E_l E_r^* + E_r E_l^*, \\ V &= i(E_l E_r^* - E_r E_l^*), \end{aligned}$$

che descrivono l'intensità (essendo I) e lo stato di polarizzazione (tramite $(Q, U, V)/I$) dell'onda elettromagnetica, si può convertire la relazione lineare $\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{J} \vec{\mathbf{E}}_0$ in una relazione $\mathbf{I} = \mathbf{M} \mathbf{I}_0$ tra i vettori dei parametri di Stokes, essendo esprimibile in \mathbf{J} la *matrice di Mueller* \mathbf{M} . Infatti, se $\mathbf{J} \in SU(2)$, allora la corrispondente matrice di Mueller ha la forma $\mathbf{M} = 1 \oplus \tilde{\Phi}(\mathbf{J}) \in 1 \oplus SO(3)$.¹¹

Lor. Consideriamo ora il gruppo di Lorentz Lor. I suoi generatori sono gli elementi di una opportuna base della sua algebra di Lie \mathfrak{lor} . Siccome $\dim \text{Lor} = 8$, abbiamo i seguenti generatori:

$$\begin{aligned} P_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹¹Nella $\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^4$ abbiamo $M_{11} = 1$, $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{21} = M_{31} = M_{41} = 0$ e $(M_{ij})_{i,j=2}^4 = \tilde{\Phi}(\mathbf{J}) \in SO(3)$.

Calcoliamo ora e^{tP} per i sei generatori di Lor. Si ha

$$\begin{aligned}
e^{tP_{01}} &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & e^{tP_{02}} &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{tP_{03}} &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}, & e^{tP_{12}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{tP_{13}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, & e^{tP_{23}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Gli elementi di Lor sono prodotti di questi sei gruppi di un singolo parametro in qualsiasi ordine. Inoltre, i commutatori tra i generatori sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
[P_{01}, P_{02}] &= -[P_{02}, P_{01}] = P_{12}, & [P_{01}, P_{03}] &= -[P_{03}, P_{01}] = -P_{13}, \\
[P_{01}, P_{12}] &= -[P_{12}, P_{01}] = P_{02}, & [P_{01}, P_{13}] &= -[P_{13}, P_{01}] = -P_{03}, \\
[P_{01}, P_{23}] &= -[P_{23}, P_{01}] = 0, & [P_{02}, P_{03}] &= -[P_{03}, P_{02}] = P_{23}, \\
[P_{02}, P_{12}] &= -[P_{12}, P_{02}] = -P_{01}, & [P_{02}, P_{13}] &= -[P_{13}, P_{02}] = 0, \\
[P_{02}, P_{23}] &= -[P_{23}, P_{02}] = P_{03}, & [P_{03}, P_{12}] &= -[P_{12}, P_{03}] = 0, \\
[P_{03}, P_{13}] &= -[P_{13}, P_{03}] = P_{01}, & [P_{03}, P_{23}] &= -[P_{23}, P_{03}] = -P_{02}, \\
[P_{12}, P_{13}] &= -[P_{13}, P_{12}] = P_{23}, & [P_{12}, P_{23}] &= -[P_{23}, P_{12}] = -P_{13}, \\
[P_{13}, P_{23}] &= -[P_{23}, P_{13}] = P_{12}.
\end{aligned}$$

$SL_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathbf{Lor}$. Consideriamo ora il gruppo $SL_2(\mathbb{C})$ delle matrici complesse di ordine 2 con determinante uguale ad 1, per cui l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ consiste nelle matrici complesse di ordine 2 con traccia uguale a zero. Dunque $\dim SL_2(\mathbb{C}) = 6$. I generatori del gruppo sono le tre matrici di Pauli più le tre matrici

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

cioè

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{i[t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3 + u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3] : t_1, t_2, t_3, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Si calcoli facilmente che

$$e^{it\tau_1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad e^{it\tau_2} = \begin{pmatrix} \cosh t & -i \sinh t \\ i \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad e^{it\tau_3} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Si trovano i seguenti commutatori:

$$\begin{aligned}
[\sigma_1, \tau_1] &= 0, & [\sigma_2, \tau_2] &= 0, & [\sigma_3, \tau_3] &= 0, \\
[\sigma_1, \tau_2] &= 2i\tau_3, & [\sigma_2, \tau_3] &= 2i\tau_1, & [\sigma_3, \tau_1] &= 2i\tau_2, \\
[\sigma_2, \tau_1] &= -2i\tau_3, & [\sigma_3, \tau_2] &= -2i\tau_1, & [\sigma_1, \tau_3] &= -2i\tau_2, \\
[\tau_1, \tau_2] &= -2i\sigma_3, & [\tau_2, \tau_3] &= -2i\sigma_1, & [\tau_3, \tau_1] &= -2i\sigma_2, \\
[\sigma_1, \sigma_2] &= 2i\sigma_3, & [\sigma_2, \sigma_3] &= 2i\sigma_1, & [\sigma_3, \sigma_1] &= 2i\sigma_2.
\end{aligned}$$

Definiamo ora

$$\begin{cases}
\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{lor}, \\
\varphi(i[t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3 + u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3]) \mapsto \\
2[t_1P_{13} + t_2P_{12} + t_3P_{23} + u_1P_{02} + u_2P_{03} + u_3P_{01}].
\end{cases}$$

Definendo $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Lor}$ da $\Phi(e^A) = e^{\varphi(A)}$ per ogni $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, si ha

$$\begin{aligned}
e^{it\sigma_1} = \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}, \\
e^{it\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ 0 & -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{it\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{23}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & 0 & -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}, \\
e^{it\tau_1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{02}} = \begin{pmatrix} \cosh 2t & 0 & \sinh 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh 2t & 0 & \cosh 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{it\tau_2} = \begin{pmatrix} \cosh t & -i \sinh t \\ i \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{03}} = \begin{pmatrix} \cosh 2t & 0 & 0 & \sinh 2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh 2t & 0 & 0 & \cosh 2t \end{pmatrix}, \\
e^{it\tau_3} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} e^{2tP_{01}} = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & 0 & 0 \\ \sinh 2t & \cosh 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si vede subito che φ non è biunivoca e è infatti due a uno: $\varphi(\pm I) = I$. Di conseguenza,

$$\frac{SL_2(\mathbb{C})}{\{I, -I\}} \simeq \text{Lor}.$$

Osserviamo che φ e Φ estendono le rispettive trasformazioni $\tilde{\varphi} : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ e $\tilde{\Phi} : SU(2) \rightarrow SO(3)$ se consideriamo $SU(2)$ un sottogruppo di $SL_2(\mathbb{C})$ e identifichiamo $SO(3)$ con $1 \oplus SO(3)$. In tal caso la trasformazione $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Lor}$ manda le matrici di Jones appartenenti a $SL_2(\mathbb{C})$ in matrici di Mueller appartenenti a Lor (vedi l'esempio V.12).

SU(3). Consideriamo ora il gruppo $SU(3)$ delle matrici 3×3 unitarie con determinante uguale ad 1. La sua algebra di Lie $\mathfrak{su}(3)$ consiste nelle matrici complesse antiautoaggiunte (cioè, $A^* = -A$) di ordine 3 e di traccia zero. Quindi $\dim SU(3) = 8$. Potremmo estendere ogni elemento di $SU(2)$ (oppure $\mathfrak{su}(2)$) ad un elemento di $SU(3)$ (oppure $\mathfrak{su}(3)$) facendo la somma diretta della matrice con lo scalare 1 (oppure 0). Purtroppo così si introducono 9 generatori anziché 8, quindi i nove generatori così costruiti sono linearmente indipendenti. Abbiamo i seguenti generatori:

$$\begin{aligned} \sigma_{1x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{2x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{3x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{1y} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{2y} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{3y} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{1z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{2z} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{3z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove

$$\sigma_{3x} + \sigma_{3y} + \sigma_{3z} = 0.$$

Quindi: Lasciando fuori una delle matrici $\sigma_{3x}, \sigma_{3y}, \sigma_{3z}$, si ottiene un sistema di generatori del gruppo $SU(3)$. Calcoliamo ora le espressioni e^{itS} , dove S è uno dei 9 generatori. Si ha

$$e^{it\sigma_{1x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & i \sin t \\ 0 & i \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\sigma_{2x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
e^{it\sigma_{3x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, & e^{it\sigma_{1y}} &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & i \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \\
e^{it\sigma_{2y}} &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, & e^{it\sigma_{3y}} &= \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix}, \\
e^{it\sigma_{1z}} &= \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t & 0 \\ i \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & e^{it\sigma_{2z}} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{it\sigma_{3z}} &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per ottenere 8 generatori introduciamo¹²

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

I corrispondenti gruppi e^{itS} sono

$$\begin{aligned}
e^{it\lambda_1} &= \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t & 0 \\ i \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & e^{it\lambda_2} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{it\lambda_3} &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & e^{it\lambda_4} &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & i \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \\
e^{it\lambda_5} &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, & e^{it\lambda_6} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & i \sin t \\ 0 & i \sin t & \cos t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

¹² $\lambda_1 = \sigma_{1z}$, $\lambda_2 = -\sigma_{2z}$, $\lambda_3 = \sigma_{3z}$, $\lambda_4 = \sigma_{1y}$, $\lambda_5 = \sigma_{2y}$, $\lambda_6 = \sigma_{1x}$, $\lambda_7 = -\sigma_{2x}$ e $\lambda_8 = (\sigma_{3x} - \sigma_{3y})/\sqrt{3} = (-2\sigma_{3y} - \sigma_{3z})/\sqrt{3} = (2\sigma_{3x} + \sigma_{3z})/\sqrt{3}$.

$$e^{it\lambda_7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\lambda_8} = \begin{pmatrix} e^{it/\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2it\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Tabella V.1: La tabella dei commutatori $[a, b]$ dove a è stata esposta in direzione orizzontale e b in direzione verticale.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
λ_1	0	$-2i\lambda_3$	$-2i\lambda_2$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_6$	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_4$	0
λ_2	$+2i\lambda_3$	0	$+2i\lambda_1$	$-i\lambda_6$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_4$	$+i\lambda_5$	0
λ_3	$+2i\lambda_2$	$-2i\lambda_1$	0	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_4$	$+i\lambda_7$	$-i\lambda_6$	0
λ_4	$+i\lambda_7$	$+i\lambda_6$	$+i\lambda_5$	0	$-i\sqrt{3}\lambda_8$	$-i\lambda_2$	$-i\lambda_1$	$+i\sqrt{3}\lambda_5$
λ_5	$-i\lambda_6$	$+i\lambda_7$	$-i\lambda_4$	$+i\sqrt{3}\lambda_8$	0	$+i\lambda_1$	$-i\lambda_2$	$-i\sqrt{3}\lambda_4$
λ_6	$+i\lambda_5$	$-i\lambda_4$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_2$	$-i\lambda_1$	0	$-i\sqrt{3}\lambda_8$	$+i\sqrt{3}\lambda_7$
λ_7	$-i\lambda_4$	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_6$	$+i\lambda_1$	$+i\lambda_2$	$+i\sqrt{3}\lambda_8$	0	$-i\sqrt{3}\lambda_6$
λ_8	0	0	0	$-i\sqrt{3}\lambda_5$	$+i\sqrt{3}\lambda_4$	$-i\sqrt{3}\lambda_7$	$+i\sqrt{3}\lambda_6$	0

$SU(n)$. Gli $n^2 - 1$ generatori del gruppo $SU(n)$ delle matrici unitarie di ordine n e determinante 1 si possono ricavare dai 3 generatori di Pauli del gruppo $SU(2)$, conducendo a

$$3 \binom{n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1)$$

generatori, tra cui $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ matrici diagonali linearmente dipendenti. Ci sono al massimo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relazioni lineari tra queste matrici diagonali che servono a ridurre il numero dei generatori al numero $\dim SU(n) = n^2 - 1$. Di nuovo si possono trovare $n(n+1)$ matrici non diagonali (le estensioni naturali di σ_1 e σ_2) e $n-1$ matrici diagonali per ottenere un insieme di $n^2 - 1$ generatori di $SU(n)$ tali che i commutatori tra loro diversi da zero sono sempre multipli di un generatore.

4 Rappresentazioni di Gruppi

Sia G un gruppo moltiplicativo. Una *rappresentazione* di G di *dimensione* n è un omomorfismo $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, cioè una trasformazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$$T(gh) = T(g)T(h), \quad g, h \in G.$$

In tal caso $T(e) = I$ (la matrice identità) e $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ per ogni $g \in G$. La trasformazione $g \mapsto T(g)_{jk}$ dall'elemento $g \in G$ all'elemento (j, k) della matrice $T(g)$ si denota T_{kj} . Quindi

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_{11}(g) & \dots & T_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1}(g) & \dots & T_{nn}(g) \end{pmatrix}.$$

Il *carattere* (inglese: character) della rappresentazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ è la funzione $\chi_T : G \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\chi_T(g) = \text{Tr } T(g) = \sum_{j=1}^n T_{jj}(g).$$

Una rappresentazione $T : g \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $T(g) \in U(n)$ per ogni $g \in G$, cioè se tutte le matrici $T(g)$ sono unitarie. Il carattere χ_T di una rappresentazione unitaria soddisfa

$$\overline{\chi_T(g)} = \sum_{j=1}^n \overline{T_{jj}(g)} = \sum_{j=1}^n [T(g)^*]_{jj} = \sum_{j=1}^n T_{jj}(g^{-1}) = \chi_T(g^{-1}), \quad g \in G.$$

Due rappresentazioni $T_1 : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ di G si dicono *equivalenti* se esiste una matrice invertibile S di ordine n tale che

$$T_1(g) = S^{-1}T_2(g)S, \quad g \in G.$$

Spesso scriviamo

$$T_1 = S^{-1}T_2S.$$

Per due rappresentazioni equivalenti $T_1, T_2 : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ vale¹³

$$\chi_{T_1}(g) = \chi_{T_2}(g), \quad g \in G.$$

La matrice d'equivalenza S tra due rappresentazioni unitarie di G può essere scelta unitaria.

Una rappresentazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ si dice *reducibile* se esiste un sottospazio non banale L di \mathbb{C}^n (cioè $(0) \subsetneq L \subsetneq \mathbb{C}^n$) tale che $T(g)[L] \subset L$ per ogni $g \in G$. Ciò vuol dire che esiste una matrice invertibile S tale che

$$S^{-1}T(g)S = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ \mathbf{0}_{l \times k} & B(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G, \quad (\text{V.10})$$

¹³Per una matrice $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ di ordine n si ha $\text{Tr } B = \sum_{j=1}^n b_{jj}$. Per ogni matrice invertibile S si ha $\text{Tr}(S^{-1}BS) = \text{Tr } B$, mentre la traccia è un funzionale lineare nello spazio vettoriale delle matrici $n \times n$.

dove $A(g)$, $B(g)$ e $C(g)$ sono matrici $k \times k$, $l \times l$ e $k \times l$ (con $k + l = n$); in tal caso $L = S[\mathbb{C}^k \oplus (0)_l]$. Inoltre, $A : G \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$ e $B : G \rightarrow GL_l(\mathbb{C})$ sono rappresentazioni di G . La rappresentazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ si dice *irriducibile* se non è riducibile.

Esempio V.13 Se

$$G = \left\{ \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

e l'immersione $G \mapsto GL_2(\mathbb{C})$ è la rappresentazione, allora $\Psi(t)[\mathbb{C} \oplus (0)] \subset \mathbb{C} \oplus (0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la rappresentazione è riducibile. Purtroppo non esiste un sottospazio lineare L di \mathbb{C}^2 tale che $[\mathbb{C} \oplus (0)] \oplus L = \mathbb{C}^2$ e $\Psi(t)[L] \subset L$.

Una rappresentazione **unitaria** $T : G \rightarrow U(n)$ è riducibile se esistono una equivalenza S (che si può scegliere unitaria) e due rappresentazioni $T_1 : G \rightarrow U(m)$ e $T_2 : G \rightarrow U(k)$ con $1 \leq m, k \leq n - 1$ e $m + k = n$ tali che

$$S^{-1}T(g)S = \begin{pmatrix} T_1(g) & \mathbf{0}_{m \times k} \\ \mathbf{0}_{k \times m} & T_2(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G, \quad (\text{V.11})$$

cioè se T è equivalente alla somma diretta $T_1 \oplus T_2$ di due rappresentazioni unitarie non banali di G . In altre parole, T si dice riducibile se esistono un'equivalenza S e due rappresentazioni T_1 e T_2 , di dimensioni m, k con $1 \leq m, k \leq n - 1$ e $m + k = n$, tali che

$$S^{-1}TS = T_1 \oplus T_2.$$

Proposizione V.14 ¹⁴ Sia G un gruppo finito e T una rappresentazione di G di dimensione n . Allora T è equivalente ad una rappresentazione unitaria di G .

Dimostrazione. Sia

$$H = \sum_{g \in G} T(g)T(g)^*.$$

Allora H è una matrice $n \times n$ autoaggiunta senza autovalori negativi. Quindi esistono una matrice unitaria U e una matrice diagonale D tali che

$$U^{-1}HU = D.$$

¹⁴La proposizione rimane valida se G è un gruppo compatto di Lie, per esempio se G è uno dei gruppi $SO(n)$, $O(n)$, $SU(n)$ e $U(n)$.

Ovviamente il diagonale di D consiste negli autovalori (non negativi) di H . Ponendo $T'(g) = U^{-1}T(g)U$ otteniamo

$$D = \sum_{g \in G} T'(g)T'(g)^*.$$

Dunque

$$\begin{aligned} d_k &\stackrel{\text{def}}{=} D_{kk} = \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^n T'_{kj}(g) \overline{T'_{kj}(g)} \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^n |T'_{kj}(g)|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

mentre $d_k = 0$ implicherebbe $T'_{kj}(g) = 0$ per ogni j e ogni $g \in G$ e quindi che la riga k -esima della matrice $T'(g)$ si annullerebbe per ogni $g \in G$. Siccome $T'(g)$ deve essere invertibile, si ha $d_k > 0$ per $k = 1, \dots, n$. Sia adesso $D^{1/2}$ la matrice diagonale con elementi diagonali $\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}$. Ponendo $V = UD^{1/2}$ risulta

$$\begin{aligned} \Gamma(g) &\stackrel{\text{def}}{=} V^{-1}T(g)V \\ &= D^{-1/2}U^{-1}T(g)UD^{1/2} \\ &= D^{-1/2}T'(g)D^{1/2}. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \Gamma(g)\Gamma(g)^* &= [D^{-1/2}T'(g)D^{1/2}][D^{1/2}T'(g)^*D^{-1/2}] \\ &= D^{-1/2}T'(g)DT'(g)^*D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2}T'(g) \sum_{h \in G} T'(h)T'(h)^*T'(g)^*D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2} \sum_{h \in G} T'(gh)T'(gh)^*D^{-1/2} \\ &= D^{-1/2}DD^{-1/2} = I_n, \end{aligned}$$

essendo I_n la matrice identità di ordine n . Quindi $\Gamma(g)$ è una matrice unitaria di ordine n e

$$\Gamma(g) = V^{-1}T(g)V, \quad g \in G,$$

per un'opportuna matrice invertibile V . Di conseguenza, Γ è una rappresentazione unitaria di G equivalente alla rappresentazione T . \square

È ora chiaro che ogni rappresentazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ di un gruppo finito è equivalente ad una somma diretta di un numero finito di rappresentazioni unitarie irriducibile.¹⁵

Discutiamo ora due lemmi, i cosiddetti *Lemmi di Schur*, fondamentali per dimostrare il teorema di ortogonalità.

Lemma V.15 *Una matrice che commuta con tutte le matrici di una rappresentazione irriducibile di un gruppo G è un multiplo scalare della matrice identità.*

Dimostrazione. Sia $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ una rappresentazione irriducibile di G e sia P una matrice $n \times n$ tale che $T(g)P = PT(g)$ per ogni $g \in G$. Potremmo trovare un'equivalenza S con una rappresentazione unitaria irriducibile T' , $S^{-1}T(g)S = T'(g)$ per ogni $g \in G$, e definire $P' = S^{-1}PS$. Se riuscissimo a dimostrare il lemma per T' unitaria irriducibile e P' , allora P' sarebbe un multiplo della matrice identità e quindi anche $P = SP'S^{-1}$. Di conseguenza, basta dimostrare il lemma se T è una rappresentazione unitaria e irriducibile e $PT(g) = T(g)P$ per ogni $g \in G$.

Consideriamo prima una matrice hermitiana H tale che $HT(g) = T(g)H$ per ogni $g \in G$. Allora esistono una matrice unitaria U e una matrice diagonale reale D tali che $U^{-1}HU = D$; $D = \text{diag}(d_k)_{k=1}^n$, $d_1 \dots \leq d_n$. Allora $T'(g) = U^{-1}T(g)U$ per $g \in G$ definisce una rappresentazione unitaria e irriducibile di G che commuta con la matrice diagonale D . Raggruppiamo gli elementi d_k di D nel seguente modo:

$$D = \text{diag}(c_1 I_{n_1}, \dots, c_m I_{n_m}), \quad c_1 < \dots < c_m, \quad n_1 + \dots + n_m = n.$$

Raggruppando gli elementi di $T'(g)$ per $g \in G$ nello stesso modo,

$$T'(g) = (\mathbb{T}_{jk}(g))_{j,k=1}^m,$$

dove $\mathbb{T}_{jk}(g)$ è una matrice $n_j \times n_k$, risulterà dall'identità $DT'(g) = T'(g)D$:

$$c_j \mathbb{T}_{jk}(g) = c_k \mathbb{T}_{jk}(g), \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Per $j \neq k$ il fatto che $c_j \neq c_k$ implica che la matrice $\mathbb{T}_{jk}(g) = 0$ per ogni $g \in G$. Di conseguenza,

$$U^{-1}T(g)U = T'(g) = \mathbb{T}_{11}(g) \oplus \dots \oplus \mathbb{T}_{mm}(g), \quad g \in G.$$

¹⁵Ogni rappresentazione $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ è equivalente ad una somma diretta di un numero finito o infinito numerabile di rappresentazioni unitarie irriducibili se G è un gruppo compatto di Lie. Un tale risultato vale in particolare per i gruppi compatti $SU(n)$, $U(n)$, $SO(n)$ e $O(n)$.

L'irriducibilità di T implica che $m = 1$ e $D = c_1 I_n$.

Ora consideriamo una matrice P tale che $PT(g) = T(g)P$ per ogni $g \in G$, essendo $T : G \rightarrow U(n)$ una rappresentazione unitaria irriducibile di G . Allora $P^*T(g)^* = T(g)^*P^*$ per ogni $g \in G$ e quindi

$$P^*T(g) = P^*T(g^{-1})^* = T(g^{-1})^*P^* = T(g)P^*, \quad g \in G.$$

Quindi anche P^* commuta con tutte le matrici $T(g)$. Definendo le matrici hermitiane $H_1 = [P + P^*]/2$ e $H_2 = [P - P^*]/2i$, è chiaro che H_1 e H_2 commutano con tutte le matrici $T(g)$. Quindi esistono costanti reali c_1, c_2 tali che $H_1 = c_1 I_n$ e $H_2 = c_2 I_n$. Di conseguenza, $P = H_1 + iH_2 = (c_1 + ic_2)I_n$. \square

Esempio V.16 Siano G il gruppo dell'esempio V.13 e l'immersione in $GL_2(\mathbb{C})$ la rappresentazione. Allora le matrici che commutano con tutte le matrici $\Psi(t)$ sono esattamente le matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$. Quindi la rappresentazione $G \mapsto GL_2(\mathbb{C})$ non soddisfa alle conclusioni del Lemma V.16. È purtroppo riducibile.

Ora sia $G = SO(2)$, dove l'immersione di $SO(2)$ in $GL_2(\mathbb{C})$ è la rappresentazione. Siccome

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

la rappresentazione non può essere irriducibile. Infatti,

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Lemma V.17 Siano $T_1 : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ due rappresentazioni irriducibili di G e sia M una matrice $n \times m$ tale che

$$T_1(g)M = MT_2(g), \quad g \in G. \quad (\text{V.12})$$

Allora $M = \mathbf{0}_{n \times m}$, oppure $n = m$ e le due rappresentazioni sono equivalenti.

Dimostrazione. Di nuovo, potremmo prendere due rappresentazioni unitarie. In tal caso $T_s(g^{-1}) = T_s(g)^{-1} = T_s(g)^*$ per $s = 1, 2$ e $g \in G$.

Dalla (V.12) segue subito

$$M^*T_1(g)^* = T_2(g)^*M^*, \quad g \in G,$$

e dunque

$$M^*T_1(g) = M^*T_1(g^{-1})^* = T_2(g^{-1})^*M^* = T_2(g)M^*, \quad g \in G.$$

Di conseguenza,

$$M^*MT_2(g) \stackrel{(V.12)}{=} M^*T_1(g)M = T_2(g)M^*M, \quad g \in G.$$

Dall'irriducibilità della rappresentazione T_2 segue che $M^*M = cI_m$ per un'opportuna costante c .

Se $c \neq 0$, segue l'invertibilità della M : $n = m$, $M^{-1} = c^{-1}M^*$. Al contrario, se $c = 0$, risulta per l'elemento (j, j) di M^*M :

$$0 = [M^*M]_{jj} = \sum_{k=1}^n \overline{M_{kj}}M_{kj} = \sum_{j=1}^n |M_{kj}|^2,$$

implicando $M_{kj} = 0$ per tutti i pedici k, j . Quindi $M = 0$. \square

Per due rappresentazioni $T_1 : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ di G irriducibili **non equivalenti** e una matrice X di tipo $n \times m$ si definisce

$$M = \sum_{g \in G} T_1(g)XT_2(g^{-1}).$$

Allora per ogni $h \in G$ si ha

$$\begin{aligned} T_1(h)M &= T_1(h) \sum_{g \in G} T_1(g)XT_2(g^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} T_1(hg)XT_2(g^{-1}h^{-1})T_2(h) \\ &= \sum_{g \in G} T_1(hg)XT_2((hg)^{-1})T_2(h) \\ &= \sum_{l \in G} T_1(l)XT_2(l^{-1})T_2(h) = MT_2(h). \end{aligned}$$

Dal lemma precedente segue $M = 0$. Specializzando il risultato $M = 0$ per l'elemento (j, k) segue

$$\sum_{g \in G} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m [T_1]_{jp}(g)X_{pq}[T_2]_{qk}(g^{-1}) = 0. \quad (V.13)$$

Prendendo una matrice X per cui tutti gli elementi tranne uno si annullano si ottiene dalla (V.13)

$$\sum_{g \in G} [T_1]_{jp}(g)[T_2]_{qk}(g^{-1}) = 0. \quad (V.14)$$

Di conseguenza, se T_1 e T_2 sono due rappresentazioni unitarie irriducibili e non equivalenti del gruppo G , allora risulta l'ortogonalità

$$\sum_{g \in G} [T_1]_{jp}(g) \overline{[T_2]_{kq}(g)} = 0. \quad (\text{V.15})$$

Consideriamo ora un'unica rappresentazione unitaria e irriducibile $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Sia

$$N = \sum_{g \in G} T(g) X T(g^{-1}) = \sum_{g \in G} T(g) X T(g)^{-1} \quad (\text{V.16})$$

per un'opportuna matrice X di ordine n . Allora per ogni $h \in G$ si ha $T(h)N = NT(h)$ e quindi $N = cI_n$ per un'opportuna costante c . Quindi

$$cn = \text{Tr } N = \sum_{g \in G} \text{Tr} (T(g) X T(g)^{-1}) = \sum_{g \in G} \text{Tr} (X) = (\#G) \text{Tr } X,$$

dove $\#G$ è l'ordine (il numero degli elementi) di G . Di conseguenza,

$$\sum_{g \in G} T(g) X T(g^{-1}) = \frac{(\#G) \text{Tr } X}{n}. \quad (\text{V.17})$$

Dalla (V.17) segue subito il **Teorema di Ortogonalità**

$$\sum_{g \in G} T_{kj}(g) \overline{T_{kl}(g)} = \delta_{jl} \frac{\#G}{n} \quad (\text{V.18})$$

per una rappresentazione unitaria e irriducibile qualsiasi di G .

Dalla (V.14) (specificata per $j = p$ e $q = k$) segue l'ortogonalità dei caratteri:

$$\sum_{g \in G} \chi_{T_1}(g) \chi_{T_2}(g^{-1}) = 0$$

se T_1, T_2 sono due rappresentazioni irriducibili non equivalenti. Per una rappresentazione irriducibile $T : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ abbiamo¹⁶

$$\sum_{g \in G} \chi_T(g) \chi_T(g^{-1}) = \#G.$$

Le ultime due equazioni si possono scrivere nella forma

$$\sum_{g \in G} \chi_{T_1}(g) \overline{\chi_{T_2}(g)} = 0 \quad (\text{V.19})$$

¹⁶Si utilizzi la (V.16) per $X_{ij} = \delta_{ip} \delta_{jq}$ con N un multiplo della matrice identità e si sommi rispetto a p, q .

se T_1, T_2 sono due rappresentazioni unitarie irriducibili non equivalenti, e

$$\sum_{g \in G} |\chi_T(g)|^2 = \#G \quad (\text{V.20})$$

se T è una rappresentazione unitaria irriducibile. Le (V.19)-(V.20) costituiscono il **Teorema di Ortogonalità per i Caratteri**.

Esempio V.18 Sia H un operatore Hamiltoniano autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $g \in SO(n)$ definiamo la trasformazione unitaria $U_g : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ da $(T_g\psi)(x) = \psi(g^{-1}x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. In tal caso, per $g, h \in SO(n)$ abbiamo

$$(T_g T_h \psi)(x) = (T_h \psi)(g^{-1}x) = \psi(h^{-1}g^{-1}x) = \psi((gh)^{-1}x) = (T_{gh}\psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

implicando che $g \mapsto T_g$ è un omomorfismo da $SO(n)$ al gruppo degli operatori lineari unitari su $L^2(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo ora che

$$HT_g = T_g H, \quad g \in SO(n).$$

Allora: Se $H\psi = E\psi$ per una costante E , allora per ogni $g \in SO(n)$

$$HT_g\psi = T_g H\psi = T_g(E\psi) = ET_g\psi;$$

quindi $T_g\psi$ è autovettore di H allo stesso autovalore E . Se l'autospazio $M_E = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : H\psi = E\psi\}$ ha dimensione finita ℓ , allora, per ogni $g \in SO(n)$, T_g induce una trasformazione lineare unitaria nello spazio ℓ -dimensionale M_E . Rispetto ad una base ortonormale di M_E , T_g induce una rappresentazione unitaria di dimensione ℓ in M_E .

Considerando $H = -\Delta + V$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ per un potenziale reale V con simmetria sferica per $n \geq 2$, si ha $HT_g = T_g H$ per ogni $g \in SO(n)$. D'altra parte,

$$H = -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + V(r) - \frac{1}{r^2} L_B,$$

dove l'operatore di Beltrami L_B agisce nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ e soddisfa $L_B Y_l^m = l(l+n-2)Y_l^m$ ($l = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, \ell(l) - 1$).¹⁷ Considerando ora

$$H_l = -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+n-2)}{r^2} + V(r)$$

¹⁷Si ha $\ell(l) = 2 - \delta_{l,0}$ per $n = 2$ e $\ell(l) = 2l + 1$ per $n = 3$.

nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; r^{\frac{n-1}{2}} dr)$, si vede che per ogni autovalore E di H_l abbiamo un autovalore E di H il cui autospazio contiene le funzioni $\psi_l^m = \rho(r)Y_l^m$ ($m = 0, 1, \dots, \ell(l) - 1$) per $H_l\rho = E\rho$. Applicando $g \in SO(n)$ si ha

$$(T_g \psi_l^m)(r, \omega) = \rho(r)Y_l^m(g^{-1}\omega) = \rho(r) \sum_{\mu=0}^{\ell(l)-1} c_{m,\mu}(g)Y_l^\mu(\omega), \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Scegliendo le funzioni Y_l^m ortonormali in $L^2(S^{n-1})$, si vede facilmente che $g \mapsto (c_{m,\mu}(g))_{m,\mu=0}^{\ell(l)-1}$ è una rappresentazione $\ell(l)$ -dimensionale unitaria di $SO(n)$.

Appendice A

LA FUNZIONE GAMMA

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{A.1})$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0, 1)$ ed in $(1, +\infty)$. Infatti $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0, 1)$ e $t^\alpha |e^{-t} t^{z-1}| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.2})$$

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{A.3})$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando la (A.2) si ottiene

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{A.4})$$

L'identità (A.2) può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta

una funzione meromorfa con poli semplici nei punti $0, -1, -2, \dots$. Il residue nel polo a $z = 0$ é $\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1$, mentre quello a $-n$ ($n = 1, 2, \dots$) è il seguente

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \dots \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n (n!)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora la formula di duplicazione. Per $\text{Re } z > 0$ si ha

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-1/2} ds dt \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Scambiando α e β e prendendo la media delle due espressioni che risultano, si ottiene l'espressione più simmetrica

$$\begin{aligned} &e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\alpha e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Introducendo le nuove variabili $u = \alpha^2 + \beta^2$ e $v = 2\alpha\beta$, si trova

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty v^{2z-1} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}} du \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-v} v^{2z-1} dv \int_0^\infty e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Dunque risulta la formula di duplicazione

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (\text{A.5})$$

valida per ogni $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$.

Teorema A.1 (di Bohr-Mollerup) *Sia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi con le seguenti proprietà:*

- (a) $\log f(x)$ è una funzione convessa;
- (b) $f(x+1) = x f(x)$ per ogni $x > 0$;

(c) $f(1) = 1$.

Allora $f(x) = \Gamma(x)$ per ogni $x > 0$.

Dimostrazione. Sia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi che ha le proprietà (a)-(c). Allora la proprietà (b) implica l'identità

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x), \quad x > 0, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.6})$$

Per $x \in (0, 1]$ e $n \geq 2$ si ottiene dalla convessità¹ della funzione f

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1) - n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n}.$$

Siccome $f(m) = (m-1)!$ per $m \in \mathbb{N}$ (vedi la (b) e la (c)], risulta per $0 < x \leq 1$

$$\log(n-1)! - \log(n-2)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n! - \log(n-1)!,$$

oppure

$$x \log(n-1) \leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leq \log n, \quad 0 < x \leq 1,$$

oppure

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!$$

Applicando la (A.6) risulta per $0 < x \leq 1$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{x^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n)} \left[\frac{x+n}{n} \right].$$

Siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x+n}{n} \right] = 1$ per $x \in [0, 1]$, si ha

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (\text{A.7})$$

Dalla (A.1) si trova facilmente

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt,$$

mentre n integrazioni per parti ci danno l'identità

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Quindi le ultime due equazioni e la (A.7) implicano che $f(x) = \Gamma(x)$ per ogni $x > 0$. \square

¹La convessità della $g = \log f$ implica che il rapporto $\frac{g(n+1)-g(y)}{(n+1)-y}$ cresce se y cresce da $n-1$ a $n+1$.

Il teorema A.1 può essere applicato per dimostrare la seguente rappresentazione prodotto

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad (\text{A.8})$$

dove γ è la cosiddetta *costante di Eulero* tale che $\Gamma(1) = 1$. Sostituendo $z = 1$ si trova

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n},$$

oppure

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} e^{1/k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log(n+1) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right]. \end{aligned}$$

Tornando alla (A.8) abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k e^{z/k}}{z+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1) \dots (z+n)} \exp \left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che la funzione $\Gamma(z)$ definita dal prodotto infinito (A.8) coincide con la funzione gamma introdotta prima.

Per $0 < \operatorname{Re} z < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+z} e^{z/k} \cdot \frac{e^{-\gamma(1-z)}}{1-z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1-z} e^{(1-z)/k} \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{z(1-z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k+1-z)} e^{1/k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma}}{z(n+1-z)} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} e^{1/k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},
\end{aligned}$$

secondo la rappresentazione prodotto della funzione $\sin(\pi z)$. Quindi

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{A.9})$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Ha qualche importanza la *funzione beta di Eulero*:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta, \quad (\text{A.10})$$

dove $\operatorname{Re} p > 0$ e $\operatorname{Re} q > 0$. È abbastanza semplice dimostrare che

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0. \quad (\text{A.11})$$

Per dimostrare la (A.11) basta seguire la derivazione della formula di duplicazione.

Appendice B

ANALISI FUNZIONALE

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro. Inoltre si discutono gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari \mathbb{F} che supponiamo uguale a \mathbb{R} (numeri reali) oppure a \mathbb{C} (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)
- b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)
- c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)
- d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

- e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$

per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X . Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \rightarrow Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ . La funzione f si dice *continua* se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di \mathbb{R}^n , sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_{\infty} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\infty} = \max_{z \in \Omega} |f(z)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ se e solo se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

2. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

3. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

è una norma completa in ℓ^2 .

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ . Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in U$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$.

Dato il sottoinsieme U di X , la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U .

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X . Dato il sottoinsieme U di X , la sua *chiusura* \bar{U} è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U .

Dato il sottoinsieme U di X , la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una successione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \bar{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\text{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in U\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\text{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per un opportuno vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D . Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)
- b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)
- c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)
- d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

$$e. (\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \bar{\alpha}(\chi, \varphi) + \bar{\beta}(\chi, \psi) \text{ per } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ e } \varphi, \psi, \chi \in X.$$

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*¹

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare²

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \quad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*.

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallelogramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f, g) = \left(\int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \right)^{1/2},$$

¹Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4(\varphi, \chi)^2 - 4\|\varphi\|^2\|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$.

²Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\text{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|\|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \\ \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \frac{\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \frac{\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{array} \right.$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \dots, N$).

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^N |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraeendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N , si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X . Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X , risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

di dimensione N , si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se $N \rightarrow \infty$.³ Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N .

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \rightarrow \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2 . Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2 ,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2 . Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2 . Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

³Sia $\sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n \right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ ($n = 1, \dots, N$).

4 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, & n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0.$$

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.
- [2] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego etc., 2001.
- [3] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. I, Springer, Berlin, 1967.
- [4] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. II, Springer, Berlin, 1967.
- [5] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Adam Hilger, Inst. Phys. Publ., 1990.
- [6] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.
- [7] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
- [8] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).
- [9] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.
- [10] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.
- [11] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.