1 Teorema di Gershgorin

Il seguente teorema e' stato dimostrato nel 1931 dal matematico byelorusso Semyon Aranovich Gershgorin [1901-1933].

Teorema 1.1 (di Gershgorin) *Gli autovalori di una matrice $n \times n$ cadono nell'unione dei dischi*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

Dimostrazione: Sia λ un autovalore di A e sia $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{n}$ il corrispondente autovettore colonna. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$ un tale indice che $|x_j| \leq |x_i|$ per ogni j. Allora $x_i \neq 0$. In tal caso

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - a_{ii}x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j.$$

Quindi

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

∎

Utilizzando che A e la sua trasposta A^T hanno gli stessi autovalori, si ha:

Corollario 1.2 *Gli autovalori di una matrice $n \times n$ cadono nell'unione dei dischi*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq \min \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \right) \right\}.$$

2 Matrici di Gram

Sia $\langle \phi, \psi \rangle$ qualunque prodotto scalare tra due vettori ϕ e ψ. Sia $\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}$. Dati gli n vettori $\phi_1, \ldots, \phi_n$, definiamo loro matrice di Gram da:

$$G = \left(\langle \phi_i, \phi_j \rangle \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Teorema 2.1 *La matrice di Gram G è hermitiana e ha soltanto autovalori nonnegativi. Essa è invertibile se e solo se i vettori $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione: Sia $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i=1}^n$ un vettore colonna qualsiasi e sia $\boldsymbol{c}^*$ il vettore colonna composto dai suoi complessi coniugati. Allora

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^n c_i \phi_i, \sum_{j=1}^n c_j \phi_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \langle \phi_i, \phi_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left[\sum_{j=1}^n G_{ij} \overline{c_j} \right] = \sum_{i=1}^n c_i [G\boldsymbol{c}^*]_i = \langle G\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{c}^* \rangle, \end{aligned}$$

dove l'ultimo prodotto scalare è quello usuale in $\mathbb{C}^n$. Diagonalizzando G, possiamo ordinare gli autovalori di G in modo crescente (cioè, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$) tali che $GU = U\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ per un'opportuna matrice unitaria U. Di conseguenza,

$$\lambda_1 \|\boldsymbol{c}^*\|^2 \leq \langle G\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{c}^* \rangle \leq \lambda_n \|\boldsymbol{c}^*\|^2,$$

dove ambedue le disuguaglianze possono essere uguaglianza (per $\boldsymbol{c}^*$ la prima e l'ultima colonna di U rispettativamente). Quindi gli autovalori di G sono tutti nonnegativi.

La matrice G è invertibile se e solo se non esiste nessun vettore non banale $\boldsymbol{c}^*$ tale che $\langle G\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{c}^* \rangle = 0$. In tal caso non esiste nessun vettore non banale $\boldsymbol{c}$ tale che $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i = 0$. In altre parole: se e solo se i vettori $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sono linearmente indipendenti. ■