Fondamenti di Fisica Matematica: Primo parziale
03.05.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
6	12	12	30

1. Risolvere, mediante il metodo di D'Alembert, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = 1, & \\ u(x,t) \to 1, & x \to +\infty \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = e^{-x}. & \end{cases}$$

2. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (\lambda + 5)y = 0, \quad 0 \le x \le 2, \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(2) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 29u, & 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, & \\ u(\pi,t) = u_x(\pi,t), & \\ u(x,0) = (\pi - x)\sin(x). & \end{cases}$$

SOLUZIONI

1. Ponendo $u(x,t) = v(x,t) + 1$, otteniamo il seguente sistema differenziale:
$$\begin{cases} v_{tt} = 4v_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \\ v(x,0) = 0, & \\ v(x,t) \to 0, & x \to +\infty \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}, \\ v_t(x,0) = e^{-x}. & \end{cases}$$
Rappresentando $v(x,t)$ nella forma
$$v(x,t) = -f(x-2t) + f(x+2t),$$
si ha $f'(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$ e quindi $f(x) = c - \frac{1}{4}e^{-x}$ per un'opportuna costante c. Di conseguenza,
$$u(x,t) = 1 + \tfrac{1}{4}e^{-(x-2t)} - \tfrac{1}{4}e^{-(x+2t)} = 1 + \tfrac{1}{2}e^{-x}\sinh(2t).$$

2. L'equazione differenziale ̀lineare, omogenea, di secondo ordine e di coefficienti costanti, con equazione caratteristica
$$\alpha^2 + 2\alpha + (\lambda + 5) = 0,$$
oppure $(\alpha+1)^2 = -(\lambda+4)$. Per $\lambda > -4$ otteniamo (dato che $y(2) = 0$) $y(x) \sim e^{-x}\sin[(2-x)\sqrt{\lambda+4})]$, dove
$$\cos[2\sqrt{\lambda+4}] = 0.$$
Quindi $\lambda_n = -4 + [(2n-1)\pi/4]^2$. Le corrispondenti autofunzioni sono:
$$\phi_n(x) = e^{-x}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{4}(2-x)].$$
Poichè
$$-(e^{2x}y')' = (\lambda+5)e^{2x}y,$$
otteniamo la relazione di ortogonalità
$$\int_0^2 \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = N_n\delta_{n,m}, \qquad n,m = 1,2,3,\ldots,$$

essendo $N_n > 0$ un'opportuna costante di normalizzazione (infatti, $N_n = 1$). Ci rimane l'esclusione dei casi $\lambda = -4$ e $\lambda < -4$. Per $\lambda = -4$ otteniamo $y(x) = c(2-x)e^{-x}$. La condizione $y(0) + y'(0) = -c = 0$ darebbe $y(x) \equiv 0$. Nel caso $\lambda < -4$, avremmo

$$y(x) = ce^{-x} \sinh[(2-x)\sqrt{-\lambda - 4}].$$

Di conseguenza,

$$y(0) + y'(0) = -c\sqrt{-\lambda - 4} \cosh[2\sqrt{-\lambda - 4}],$$

il quale può soltanto annularsi se $c = 0$.

3. Ponendo $u(x,t) = e^{-\lambda t}\phi(x)$, risulta

$$\phi'' + 4\phi'(x) + (\lambda + 29)\phi(x) = 0.$$

Oppure:

$$-(e^{4x}\phi')' = (\lambda + 29)e^{4x}\phi(x).$$

L'equazione catteristica

$$(\alpha + 2)^2 = -(\lambda + 25)$$

conduce a tre casi: $\lambda > -25$, $\lambda = -25$ e $\lambda < -25$. Nel caso $\lambda > -25$ abbiamo

$$\phi_n(x) = e^{-2x} \sin[x\sqrt{\lambda_n + 25}],$$

dove $\lambda_n = -25 + (\alpha_n/\pi)^2$, essendo, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, α_n la soluzione dell'equazione $\tan(\alpha) = -(\alpha/3\pi)$ nell'intervallo $((n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi)$. Dunque

$$\int_0^\pi \phi_n(x)\phi_m(x)e^{4x}\, dx = N_n\delta_{n,m}, \qquad n, m = 1, 2, 3, \ldots,$$

per un'opportuna costante di normalizzazione N_n. Per $\lambda = -25$ otteniamo $\phi(x) = cxe^{-2x}$. In tal caso $\phi(\pi) - \phi'(\pi)2\pi ce^{-2\pi}$ si annulla se e solo se $c = 0$. Nel caso $\lambda < -25$ risulta

$$\phi(x) = ce^{-2x} \sinh(x\sqrt{-\lambda - 25}).$$

In tal caso

$$\begin{aligned}\phi(\pi) - \phi'(\pi) = ce^{-2\pi} \Big[&- \sinh(\pi\sqrt{-\lambda - 25}) \\ &+ \sqrt{-\lambda - 25} \cosh(\pi\sqrt{-\lambda - 25}) \Big]\end{aligned}$$

si annulla se e solo se $c = 0$. Poichè tutti gli autovalori sono maggiori di -25, abbiamo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25}),$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25}) = (\pi - x)\sin(x).$$

Si calcola facilmente che

$$c_n = \frac{1}{N_n} \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(x) e^{-2x} \sin(x\sqrt{\lambda_n + 25})\, dx.$$