Fondamenti di Fisica Matematica: Primo parziale
24.04.2012; Versione A

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
6	12	12	30

1. Risolvere, mediante il metodo di D'Alembert, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_{xx} + 3u_{xt} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = \sin(x), \\ u_t(x,0) = \cos(x). \end{cases}$$

2. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + (\lambda + 10)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 3, \\ y(3) = y'(3), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 6u_x - 4u_t + 3u, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) + u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x}\cos(\frac{3}{2}x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Fondamenti di Fisica Matematica: Primo parziale
24.04.2012; Versione B

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
6	12	12	30

1. Risolvere, mediante il metodo di D'Alembert, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} - 5u_{xx} - 4u_{xt} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = \cos(x), \\ u_t(x,0) = \sin(x). \end{cases}$$

2. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + (\lambda + 65)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \\ y'(5) = -4y(5), \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - 8u_x + 2u_t + 8u, \quad 0 \leq x \leq \pi, \ t \geq 0, \\ u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{2x}[1 - \cos(\frac{5}{2}x)], \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONI

1A. Sostituendo $u(x,t) = f(x - ct)$, otteniamo

$$c^2 f''(x - ct) + 2f''(x - ct) - 3cf''(x - ct) = 0.$$

Gli zeri dell'equazione $c^2 - 3c + 2 = 0$ sono $c = 1$ e $c = 2$. Quindi la soluzione generale della PDE è

$$u(x,t) = f(x - t) + g(x - 2t),$$

essendo f e g di classe C^2. Sostituendo le condizioni iniziali si ha:

$$f(x) + g(x) = \sin(x), \qquad \text{implicando } f'(x) + g'(x) = \cos(x),$$
$$-f'(x) - 2g'(x) = \cos(x).$$

Quindi $f'(x) = 3\cos(x)$ e $g'(x) = -2\cos(x)$. Di conseguenza, $f(x) = 3\sin(x) + d$, $g(x) = -2\sin(x) - d$ e

$$u(x,t) = 3\sin(x - t) - 2\sin(x - 2t).$$

1B. Sostituendo $u(x,t) = f(x - ct)$, otteniamo

$$c^2 f''(x - ct) - 5f''(x - ct) + 4cf''(x - ct) = 0.$$

Gli zeri dell'equazione $c^2 + 4c - 5 = 0$ sono $c = 1$ e $c = -5$. Quindi la soluzione generale della PDE è

$$u(x,t) = f(x - t) + g(x + 5t),$$

essendo f e g di classe C^2. Sostituendo le condizioni iniziali si ha:

$$f(x) + g(x) = \cos(x), \qquad \text{implicando } f'(x) + g'(x) = -\sin(x),$$
$$-f'(x) - 2g'(x) = \cos(x).$$

Quindi $f'(x) = -\sin(x)$ e $g'(x) = 0$. Di conseguenza, $f(x) = \cos(x) + d$, $g(x) = -d$ e

$$u(x,t) = \cos(x - t).$$

2A. L'equazione caratteristica della ODE è $\alpha^2 - 6\alpha + \lambda + 10 = 0$, con gli zeri $\alpha = 3 \pm \sqrt{-\lambda - 1}$ per $\lambda < -1$, $\alpha = 3$ per $\lambda = -1$ (doppio) e $\alpha = 3 \pm i\sqrt{\lambda + 1}$ per $\lambda > -1$. Per $\lambda > -1$ risulta, grazie alla condizione $y(0) = 0$, $y \sim e^{3x} \sin(x\sqrt{\lambda + 1})$. La condizione $y(3) = y'(3)$ implica

$$\sin(3\sqrt{\lambda+1}) = 3\sin(3\sqrt{\lambda+1}) + \sqrt{\lambda+1}\,\cos(3\sqrt{\lambda+1}),$$

oppure

$$\tan(3\sqrt{\lambda+1}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda+1}.$$

Essendo $0 < z_1 < z_2 < \ldots$ gli zeri positivi dell'equazione $\tan(z_n) = -\frac{1}{6}z_n$, otteniamo $\lambda_n = -1 + (z_n/3)^2$ e

$$y_n(x) \sim e^{3x} \sin(\tfrac{1}{3}z_n x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Riscrivendo la ODE nella forma $(e^{-6x}y')' + (\lambda + 10)e^{-6x}y = 0$, il peso risulta e^{-6x}, cioè

$$\int_0^3 y_n(x)y_m(x)e^{-6x}\,dx = C_n\delta_{n,m},$$

essendo C_n una costante di normalizzazione. Per $\lambda < -1$, risulta, grazie a $y(0) = 0$, $y \sim e^{3x}\sinh(x\sqrt{-\lambda - 1})$. La condizione $y(3) = y'(3)$ implica

$$\sinh(3\sqrt{-\lambda-1}) = 3\sinh(3\sqrt{-\lambda-1}) + \sqrt{-\lambda-1}\,\cosh(3\sqrt{-\lambda-1}),$$

oppure

$$\tanh(3\sqrt{-\lambda-1}) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\lambda-1}.$$

Poichè $\tanh(z)$ e z hanno lo stesso segno, ciò risulta impossibile. Per $\lambda = -1$ risulta, grazie a $y(0) = 0$, $y \sim xe^{3x}$. La condizione $y(3) = y'(3)$ implica $9e^9 = 10e^9$, un'impossibilità.

2B. L'equazione caratteristica della ODE è $\alpha^2 + 8\alpha + \lambda + 65 = 0$, con gli zeri $\alpha = -4 \pm \sqrt{-\lambda - 49}$ per $\lambda < -49$, $\alpha = -4$ per $\lambda = -49$ (doppio) e $\alpha = -4 \pm i\sqrt{\lambda + 49}$ per $\lambda > -49$. Per $\lambda > -49$ risulta, grazie alla condizione $y'(0) = 0$, $y' \sim e^{-4x}\sin(x\sqrt{\lambda + 49})$ e quindi

$$y \sim \frac{e^{-4x}}{\lambda + 65}\left\{-4\sin(x\sqrt{\lambda+49}) - \sqrt{\lambda+49}\,\cos(x\sqrt{\lambda+49})\right\}.$$

La condizione $-4y(5) = y'(5)$ implica

$$\sin(5\sqrt{\lambda+49}) = \frac{16\sin(5\sqrt{\lambda+49}) + 4\sqrt{\lambda+49}\,\cos(5\sqrt{\lambda+49})}{\lambda+65},$$

oppure

$$\cot(5\sqrt{\lambda+49}) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\lambda+49}.$$

Essendo $0 < z_1 < z_2 < \ldots$ gli zeri positivi dell'equazione $\cot(z_n) = \frac{1}{20}z_n$, otteniamo $\lambda_n = -49 + (z_n/5)^2$ e

$$y_n(x) \sim e^{-4x}\sin(\tfrac{1}{5}z_n x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Riscrivendo la ODE nella forma $(e^{8x}y')' + (\lambda+65)e^{8x}y = 0$, il peso risulta e^{8x}, cioè

$$\int_0^5 y_n(x)y_m(x)e^{8x}\,dx = C_n\delta_{n,m},$$

essendo C_n una costante di normalizzazione. Per $\lambda < -49$, risulta, grazie a $y'(0) = 0$, $y' \sim e^{-4x}\sinh(x\sqrt{-\lambda-49})$ e dunque

$$y \sim \frac{e^{-4x}}{\lambda+65}\left\{-4\sinh(x\sqrt{-\lambda-49}) - \sqrt{-\lambda-49}\,\cosh(x\sqrt{-\lambda-49})\right\}.$$

La condizione $-4y(5) = y'(5)$ implica

$$\sinh(5\sqrt{-\lambda-49}) = \frac{16\sinh(3\sqrt{-\lambda-49}) + 4\sqrt{-\lambda-49}\,\cosh(5\sqrt{-\lambda-49})}{\lambda+65},$$

oppure

$$\coth(5\sqrt{-\lambda-49}) = -\tfrac{1}{4}\sqrt{-\lambda-49}.$$

Poichè $\coth(z)$ e z hanno lo stesso segno, ciò risulta impossibile. Per $\lambda = -49$ risulta, grazie a $y'(0) = 0$, $y' \sim xe^{-4x}$ e dunque $y \sim (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16})e^{-4x}$. La condizione $-4y(5) = y'(5)$ implica $5e^{-20} = \frac{21}{4}e^{-20}$, un'impossibilità.

3A. La separazione delle variabili conduce alle equazioni

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 4\frac{T'(t)}{T(t)} = 3\left\{\frac{X''(x)}{X(x)} + 2\frac{X'(x)}{X(x)} + 1\right\} \equiv -3\lambda,$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(\tfrac{\pi}{2}) + X(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad T'(0) = 0.$$

Le equazioni nella variabile x conducono al problema al contorno

$$X''(x) + 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(\tfrac{\pi}{2}) + X(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha+1+\lambda = 0$, con gli zeri $\alpha = -1 \pm i\sqrt{\lambda}$ per $\lambda > 0$, $\alpha = -1 \pm \sqrt{-\lambda}$ per $\lambda < 0$ e $\alpha = -1$ (doppio) per $\lambda = 0$. Per $\lambda > 0$ la condizione $X(0) = 0$ conduce a $X(x) \sim e^{-x}\sin(x\sqrt{\lambda})$. La condizione $X'(\frac{\pi}{2}) + X(\frac{\pi}{2}) = 0$ implica

$$\sqrt{\lambda}\,\cos(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}) = 0,$$

mentre $\lambda > 0$. Quindi $\lambda_n = (2n-1)^2$ per $n = 1, 2, \ldots$ e $X_n(x) \sim e^{-x}\sin((2n-1)x)$. Per $\lambda < 0$ si ha (grazie a $X(0) = 0$): $X(x) \sim e^{-x}\sinh(x\sqrt{-\lambda})$. L'altra condizione al contorno implica

$$2\sinh(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}) + \sqrt{-\lambda}\,\cosh(\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Essendo positiva la parte a sinistra, risulta un'impossibilità. Per $\lambda = 0$, si ha $X(x) = cxe^{-x}$ per un'opportuna costante c e $c(1+\frac{\pi}{2}) = 0$, implicando che $c = 0$. Quindi tutti gli autovalori sono positivi. Passiamo ora al calcolo di $T(t)$. Si ha:

$$T_n''(t) + 4T_n'(t) + 3(2n-1)^2 T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 + 4\alpha + 3(2n-1)^2 = 0$, con gli zeri $\alpha \in \{-1, -3\}$ per $n = 1$ e $\alpha = -2 \pm i\sqrt{3(2n-1)^2 - 4}$ per $n \geq 2$. Quindi

$$T_n(t) \sim \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, & n = 1, \\ e^{-2t}\left[\cos(t\sqrt{3(2n-1)^2-4}) + \frac{2\sin(t\sqrt{3(2n-1)^2-4})}{\sqrt{3(2n-1)^2-4}}\right], & n = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 e^{-x}\sin(x)[\tfrac{3}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{2}e^{-3t}] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x)e^{2t}\left[\cos(t\sqrt{3(2n-1)^2-4}) + \frac{2\sin(t\sqrt{3(2n-1)^2-4})}{\sqrt{3(2n-1)^2-4}}\right]. \end{aligned}$$

Sostituendo $t = 0$, otteniamo

$$u(x,0) = c_1 e^{-x}\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x}\sin((2n-1)x).$$

I coefficienti seguono dall'identità

$$c_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(x,0)e^{x}\sin((2n-1)x)\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Per $u(x,0) = e^{-x}\cos(\frac{3}{2}x)$ si ha:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\tfrac{3}{2}x)\sin((2n-1)x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\sin((2n+\tfrac{1}{2})x) + \sin((2n-\tfrac{5}{2})x)\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\left[\frac{1}{2n-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

3B. La separazione delle variabili conduce alle equazioni

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - 2\frac{T'(t)}{T(t)} = 2\left\{\frac{X''(x)}{X(x)} - 4\frac{X'(x)}{X(x)} + 4\right\} \equiv -2\lambda,$$

$$X(\pi) = 0, \qquad X'(0) - 2X(0) = 0, \quad T'(0) = 0.$$

Le equazioni nella variabile x conducono al problema al contorno

$$X''(x) - 4X'(x) + (4+\lambda)X(x) = 0,$$

$$X(\pi) = 0, \qquad X'(0) - 2X(0) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \lambda = 0$, con gli zeri $\alpha = 2 \pm i\sqrt{\lambda}$ per $\lambda > 0$, $\alpha = 2 \pm \sqrt{-\lambda}$ per $\lambda < 0$ e $\alpha = 2$ (doppio) per $\lambda = 0$. Per $\lambda > 0$ la condizione $X'(0) - 2X(0) = 0$ conduce a $X(x) \sim e^{2x}\cos(x\sqrt{\lambda})$. La condizione $X(\pi) = 0$ implica

$$\cos(\pi\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi $\lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2$ per $n = 1, 2, \ldots$ e $X_n(x) \sim e^{2x}\cos((n-\frac{1}{2})x)$. Per $\lambda < 0$ si ha (grazie a $X'(0) - 2X(0) = 0$): $X(x) \sim e^{2x}\cosh(x\sqrt{-\lambda})$. L'altra condizione al contorno implica

$$\cosh(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0,$$

un'impossibilità. Per $\lambda = 0$, si ha $X(x) = cxe^{2x}$ per un'opportuna costante c e $c\pi = 0$, implicando che $c = 0$. Quindi tutti gli autovalori sono positivi. Passiamo ora al calcolo di $T(t)$. Si ha:

$$T_n''(t) - 2T_n'(t) + 2(n-\tfrac{1}{2})^2 T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0.$$

La corrispondente ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 - 2\alpha + 2(n-\frac{1}{2})^2 = 0$, con gli zeri $\alpha = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ per $n = 1$ e $\alpha = 1 \pm i\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2 - 1}$ per $n \geq 2$. Quindi

$$T_n(t) \sim \begin{cases} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1+\sqrt{2})} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1-\sqrt{2})}, & n = 1, \\ e^t\left[\cos(t\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2 - 1}) - \frac{\sin(t\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2-1})}{\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2-1}}\right], & n = 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 e^{2x}\cos(\tfrac{1}{2}x)[(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1+\sqrt{2})} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})e^{t(1-\sqrt{2})}] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{2x}\cos((n-\tfrac{1}{2})x)e^t\left[\cos(t\sqrt{2(n-\tfrac{1}{2})^2 - 1}) - \frac{\sin(t\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2 - 1})}{\sqrt{2(n-\frac{1}{2})^2 - 1}}\right]. \end{aligned}$$

Sostituendo $t = 0$, otteniamo

$$u(x,0) = c_1 e^{2x}\cos(\tfrac{1}{2}x) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{2x}\cos((n-\tfrac{1}{2})x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2x}\cos((n-\tfrac{1}{2})x).$$

I coefficienti seguono dall'identità

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)e^{-2x}\cos((n-\tfrac{1}{2})x)\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Per $u(x,0) = e^{-x}\cos(\frac{3}{2}x)$ si ha:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi [1-\cos(\tfrac{5}{2}x)]\cos((n-\tfrac{1}{2})x)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \cos((n-\tfrac{1}{2})x)\,dx - \frac{4}{\pi}\delta_{n,3}\int_0^\pi \cos^2(\tfrac{5}{2}x)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}(-1)^{n-1} - 2\delta_{n,3}. \end{aligned}$$