Fondamenti di Fisica Matematica: Primo parziale
09.11.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
6	12	12	30

1. Trovare, mediante il metodo di D'Alembert, tutte le soluzioni $u(x,t)$ di classe C^3 del seguente problema differenziale:

$$8u_{xxx} + 6u_{xxt} + u_{xtt} = 0.$$

Qual'è la soluzione sotto le condizioni iniziali

$$u(x,0) = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad u_t(x,0) = -3x.$$

2. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 12y' + (\lambda + 36)y = 0, & 0 \le x \le 4, \\ 2y(0) = y'(0), \\ y(4) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 4u_x + 2u + 2x - 6, & 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u_x(0,t) - u(0,t) = -2, \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 + e^x - x. \end{cases}$$

SOLUZIONI:

1. Sostituendo $u(x,t) = f(x-ct)$ per un'opportuna funzione non banale f di classe C^3, otteniamo

$$8f'''(x-ct) - 6cf'''(x-ct) + c^2 f'''(x-ct) = 0.$$

Risolvendo l'equazione $8 - 6c + c^2 = 0$, si trovano gli zeri $c = 2$ e $c = 4$. Poniamo

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x-4t)$$

per opportuna funzioni f, g di classe C^3. Utilizzando le condizioni iniziali si ha:

$$f(x) + g(x) = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad -2f'(x) - 4g'(x) = -3x.$$

Allora $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{2}x$. Quindi $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + d$ e $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - d$ per un'opportuna costante d. Di conseguenza,

$$u(x,t) = \tfrac{1}{4}(x-2t)^2 + \tfrac{1}{4}(x-4t)^2.$$

2. Scrivendo l'equazione differenziale nella forma Sturm-Liouville, si ha:

$$-(e^{12x}y')' - 36e^{12x}y = \lambda e^{12x}y;$$

dunque il peso è e^{12x}. Ponendo $y = e^{-6x}z$, troviamo $y' = e^{-6x}[z' - 6z]$ e $y'' = e^{-6x}[z'' - 12z' + 36z]$. In termini di z, il problema di Sturm-Liouville ha la forma

$$\begin{cases} z'' = -\lambda z, \\ 8z(0) = z'(0), \\ z(4) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando la condizione di Dirichlet $z(4) = 0$, risulta per $\lambda < 0$

$$z \sim \sin((4-x)\sqrt{\lambda});$$

utilizzando la condizione mista $8z(0) = z'(0)$, si ha:

$$8\sin(4\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\cos(4\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Per $\xi = 4\sqrt{\lambda}$, risulta l'equazione $\tan(\xi) = -(\xi/32)$. Essendo $\xi_n \in ((n-\frac{1}{2}\pi, (n+\frac{1}{2}\pi)$ lo zero n-esimo positivo ($n = 1, 2, 3, \ldots$), si ha $\lambda_n = (\xi_n/4)^2$ e

$$z_n(x) \sim \sin(\frac{4-x)\xi_n}{4}).$$

Le autofunzioni normalizzate in $L^2((0,4); e^{12x}dx)$ sono le seguenti

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_n}}\, e^{-6x} \sin(\frac{4-x)\xi_n}{4}),$$

dove

$$N_n = \int_0^4 \sin^2(\frac{(4-x)\xi_n}{4})\, dx = \int_0^4 \frac{1-\cos\left(\frac{(4-x)\xi_n}{2}\right)}{2}\, dx = 2 - \frac{\sin(2\xi_n)}{\xi_n}$$
$$= 2 - \frac{2\tan(\xi_n)}{\xi_n[1+\tan^2(\xi_n)]} = 2 + \frac{\xi_n/64}{\xi_n[1+(\xi_n/32)^2]}.$$

3. Per "omogenizzare il problema differenziale poniamo

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x),$$

dove

$$\begin{cases} 2\phi''(x) - 4\phi'(x) + 2\phi(x) + 2x - 6 = 0, \\ \phi'(0) - \phi(0) = -2, \\ \phi(1) = 0. \end{cases}$$

Allora $\phi(x) = 1 - x$. Il problema differenziale ha la forma

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} = 4v_x + 2u, \\ v_x(0,t) - v(0,t) = 0, \\ v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = e^x. \end{cases}$$

La sepazione delle variabili $v(x,t) = X(x)T(t)$ conduce al sistema

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{2X''(x)-4X'(x)+2X(x)}{X(x)} = -2\lambda, \\ X'(0) - X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione

$$\begin{cases} X''(x) - 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0, \\ X'(0) - X(0) = 0, \\ X(1) = 0, \end{cases}$$

per $\lambda > 0$, si ottiene

$$X(x) \sim e^x \sin((1-x)\sqrt{\lambda}),$$

dove $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$. Quindi $\lambda_n = (n-\frac{1}{2})\pi$ e $X_n(x) \sim e^x \sin((n-\frac{1}{2})\pi(1-x))$ $[n = 1, 2, 3, \ldots$. Per $\lambda = 0$ avremmo $X(x) \sim (1-x)e^x$ che non verifica la condizione a $x = 0$; quindi $\lambda = 0$ non è autovalore. Per $\lambda < 0$ avremmo $X_n(x) \sim e^x \sinh((1-x)\sqrt{-\lambda})$, dove $\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0$, un'impossibilità. Quindi tutti gli autovalori λ sono positivi. Allora

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2[(n-\frac{1}{2})\pi]^2 t} e^x \sin((n-\tfrac{1}{2})\pi(1-x)),$$

dove

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^x \sin((n-\tfrac{1}{2})\pi(1-x)).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}c_n &= \int_0^1 e^x e^x \sin((n-\tfrac{1}{2})\pi(1-x)) e^{-2x}\,dx \\ &= \frac{1-\cos((n-\frac{1}{2})\pi)}{(n-\frac{1}{2})\pi} = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}. \end{aligned}$$

Quindi $c_n = 4/[(2n-1)\pi]$.