Fondamenti di Fisica Matematica: Secondo parziale
12.06.2012

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
7	7	10	6	6	30

Voto: es.1+es.2+es.3+max(es.4,es.5)

1. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3(1+x)^2 u + \sin^2(\pi x), \qquad 0 \leq x \leq 2,\ t \geq 0,$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0, \qquad u(x,0) = \tfrac{1}{4}x^2.$$

2. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$-(x^2 u')' + (x^2+1)u = x\,\sin(\pi x), \qquad -1 \leq x \leq 1,$$
$$u(-1) = -1, \qquad u(1) = 1.$$

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$-\nabla^2 u + (x+y+1)u = f, \qquad (x,y) \in \Omega = (0,3) \times (0,4),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

   Discutere le caratteristiche del sistema lineare che ne esce. Si potrà far partire la discussione dalla seguente formulazione variazionale: Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\iint_\Omega \left[xy\nabla u \cdot \nabla\phi + (x^2+y^2)u\phi\right] dxdy = \iint_\Omega f\phi\, dxdy.$$

4. Sia A una matrice reale $n \times n$. Per trovare una matrice reale X tale che $X^2 = A$, poniamo $Y = I - X$ e riscriviamo l'equazione $X^2 = A$ nella forma $Y = \frac{1}{2}(I + Y^2 - A)$. Si dimostra, sotto l'ipotesi $\|I - A\| < 1$, che l'iterazione
$$Y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(I + Y_n^2 - A)$$
è convergente nell'insieme
$$\mathcal{L} = \{Y : \|Y\| \le M\},$$
essendo $M = 1 - \sqrt{1 - \|I - A\|}$.

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare lo zero $\xi = \ln(1 + \sqrt{2})$ dell'equazione
$$\sinh(x) - 1 = 0.$$
Discutere lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza, e la velocità della convergenza.

4. Sia
$$\Phi(Y) = \tfrac{1}{2}(I + Y^2 - A).$$
Allora per $Y, Z \in \mathcal{L}$ si ha:
$$\|\Phi(Y) - \Phi(Z)\| \leq \tfrac{1}{2}(\|Y\| + \|Z\|)\|Y - Z\| \leq M\|Y - Z\|.$$
Inoltre, per $Y \in \mathcal{L}$ si ha:
$$\|\Phi(Y)\| \leq \tfrac{1}{2}\|I - A\| + \tfrac{1}{2}\|Y\|^2 \leq \tfrac{1}{2}\left(\|I - A\| + M^2\right) = M.$$
Quindi $\Phi[\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ e Φ è una contrazione su $\mathcal{L}$.

5. Sia $f(x) = \sinh(x) - 1$. Lo schema è il seguente:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sinh(x_n) - 1}{\cosh(x_n)} = x_n - \tanh(x_n) + \frac{1}{\cosh(x_n)}.$$
Poichè $f'(x) = \cosh(x)$ e $f''(x) = \sinh(x)$ sono ambedue positive per $x > 0$, lo schema converge se $x_0 > 0$. Inoltre, la convergenza è quadrata, poichè lo zero ξ è semplice. Più dettagliatamente, esiste η_n tra x_n e ξ tale che
$$\frac{\sinh(x_n) - 1}{x_n - \xi} = \frac{\sinh(x_n) - \sinh(\xi)}{x_n - \xi} = \cosh(\eta_n).$$
Quindi
$$x_{n+1} - \xi = (x_n - \xi)\left\{1 - \frac{\cosh(\eta_n)}{\cosh(x_n)}\right\}.$$
Se $x_n > \xi$, allora $x_n > x_{n+1} > \xi$; se $0 < x_n < \xi$, allora $x_{n+1} > \xi$. Quindi, se $x_0 > \xi$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione decrescente di numeri maggiori di ξ. Invece, se $0 < x_0 < \xi$, allora $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ è una successione decrescente di numeri maggiori di ξ. Una tale successione converge ad η e quindi $\eta = \eta - [f(\eta)/f'(\eta)]$, implicando $f(\eta) = 0$ e quindi $\eta = \xi$. Se $x_n > \xi$ [che capita comunque per $n \geq 2$], allora esistono $x_n > \eta_n > \zeta_n > \xi$ tali che
$$\begin{aligned} x_{n+1} - \xi &= (x_n - \xi)\left\{1 - \frac{\cosh(\eta_n)}{\cosh(x_n)}\right\} \\ &= (x_n - \xi)(x_n - \eta_n)\frac{\sinh(\zeta_n)}{\cosh(x_n)} \\ &\leq (x_n - \xi)(x_n - \eta_n)\frac{\sinh(x_n)}{\cosh(x_n)} \leq (x_n - \xi)^2. \end{aligned}$$