Fondamenti di Fisica Matematica: Secondo parziale
16.12.2013

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
7	7	10	6	6	30

Voto: es.1+es.2+es.3+max(es.4,es.5)

1. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 1 \le x \le 4,\ t \ge 0,$$
$$u(1,t) = 1, \quad u(4,t) = 2, \quad u(x,0) = \tfrac{1}{3}(x+2), \quad \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4.$$
Discutere le caratteristiche del sistema lineare ottenuto.

2. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(x\,u')' + x^2 u - x^2, \qquad t \ge 0,\ 1 \le x \le 3,$$
$$u(1,t) = 0, \qquad u(3,t) = 0, \qquad u(x,0) = x.$$
Discutere le caratteristiche del sistema lineare ottenuto.

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:
$$-\nabla \cdot ([x^2 + y^2]\nabla u) + xyu = f, \qquad (x,y) \in \Omega = (1,3) \times (1,5),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$
Discutere le caratteristiche del sistema lineare ottenuto.

Si potrà far iniziare la discussione partendo dalla seguente formulazione variazionale: Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$
$$\iint_\Omega \left[[x^2+y^2]\nabla u \cdot \nabla\varphi + xyu\varphi\right] dxdy = \iint_\Omega f\varphi\, dxdy.$$

4. Per risolvere l'equazione $z^2 = w$ nel piano complesso per $w \neq 0$, poniamo $z = x + iy$ e $w = u + iv$ per $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ e scriviamo $z^2 = w$ nella forma
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - u \\ 2xy - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Indicare come si risolve tale equazione mediante il metodo di Newton, specificando la scelta iniziale (x_0, y_0) che garantisce la convergenza.

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare gli zeri $1, 2, 3$ dell'equazione
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$
Discutere, per il calcolo di ciascuno dei tre zeri, lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza, e la velocità della convergenza.

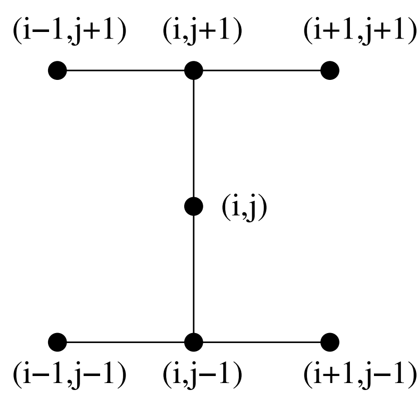
SOLUZIONI:

1. Siano $h = 3/(n+1)$, $k = T/(m+1)$, $x_i = 1 + ih$, $t_j = jk$. Secondo lo schema dei sette punti si ha:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right]$$
$$- \tfrac{3}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right],$$

dove
$$u_{0,j} = 1, \quad u_{n+1,j} = 2, \quad u_{i,0} = \tfrac{1}{3}(x_i + 2) = 1 + \tfrac{ih}{3}.$$

Inoltre,



$$\begin{aligned}
u_{i,1} &\simeq u_{i,0} + k\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](x_i, 0) + \tfrac{1}{2}k^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](x_i, 0) \\
&\simeq u_{i,0} + k\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](x_i, 0) + \tfrac{1}{2}k^2\left[\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} - 3\frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h}\right] \\
&= 1 + \frac{ih}{3} + 4k - \tfrac{1}{2}k^2.
\end{aligned}$$

Spostando tutti i termini non omogeni a destra e gli altri termini a sinistra, si ha:

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{3}{4h}\right)u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{3}{4h}\right)u_{i-1,j+1} = b_{i,j+1},$$

dove $b_{i,j+1}$ è nota (per $i = 1, 2, \ldots, n$). Tale equazione è da risolvere successivamente per $j = 1, 2, \ldots, m$. La matrice del sistema lineare è tridiagonale con elementi diagonali positivi. Tale matrice è strettamente diagonalmente dominante se

$$0 < \frac{3}{4h} \leq \frac{1}{2h^2},$$

cioè, se $0 < h \leq \frac{2}{3}$; cioè, se $n = 4, 5, 6, \ldots$.

2. Scegliamo i nodi $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 3$, non necessariamente equidistanti. Si definisca lo spline

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

In forma variazionale bisogna trovare $(\cdot, t) \in H_0^1(1, 3)$, dipendente dal tempo $t \in \mathbb{R}^+$, tale che per ogni $\varphi \in H_0^1(1, 3)$ si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_1^3 u(x, t)\varphi(x)\, dx = \int_1^3 \left[x u_x(x, t)\varphi'(x) + x^2 u(x, t)\varphi(x) \right] dx - \int_1^3 x^2 \varphi(x)\, dx,$$

dove $\int_1^3 u(x, 0)\varphi(x)\, dx = \int_1^3 x^2 \varphi(x)\, dx$. Ponendo

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\phi_j(x), \qquad \varphi(x) = \phi_i(x),$$

arriviamo al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\vec{c}\,'(t) = A\vec{c}(t) + \vec{b},$$

dove

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_1^3 \left[x\phi_i'(x)\phi_j'(x) + x^2 \phi_i(x)\phi_j(x) \right] dx, \\ b_i &= -\int_1^3 x^2 \phi_i(x)\, dx, \\ c_i(0) &= \int_1^3 x\phi_i(x)\, dx. \end{aligned}$$

Allora

$$(A\vec{c},\vec{c}) = \int_1^3 \left[x \left| \sum_{i=1}^n c_i\phi_i'(x) \right|^2 + x^2 \left| \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x) \right|^2 \right] dx \geq 0$$

qualunque sia il vettore colonna $\vec{c}$. Inoltre, se $A\vec{c} = \vec{0}$, allora (usando $x^2 \geq 1$),

$$\int_1^3 \left| \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x) \right|^2 dx = 0$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x) = 0, \qquad 1 \leq x \leq 3.$$

Sostituendo $x = x_j$ otteniamo $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Di conseguenza, A è una matrices reale, simmetrica e tridiagonale con autovalori positivi. Quindi

$$\vec{c}(t) = e^{tA}\vec{c}(0) + \left[e^{tA} - I_n\right] A^{-1}\vec{b}.$$

3. Scegliamo $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 3$ e $1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m < y_{m+1} = 5$, non necessariamente equidistanti. Per ciascun nodo interno (x_i, y_j) ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$) definiamo la funzione spline

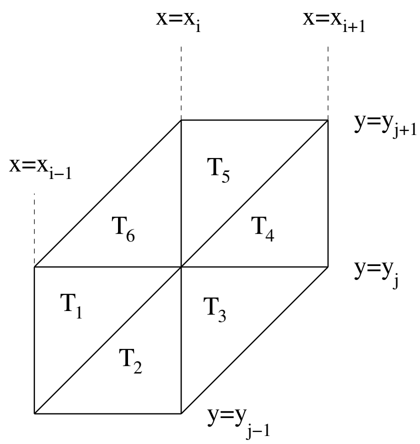
$$\phi_{(i,j)}(x,y) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & (x,y) \in T_1, \\ \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}}, & (x,y) \in T_2, \\ \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} + \frac{x_i-x}{x_{i+1}-x_i}, & (x,y) \in T_3, \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & (x,y) \in T_4, \\ \frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}, & (x,y) \in T_5, \\ \frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-1}}, & (x,y) \in T_6, \\ 0, & (x,y) \in [1,3] \times [1,5] \setminus \cup_{\sigma=1}^6 T_\sigma. \end{cases}$$

Poi enumeriamo i nodi in modo lessicografico:

$$\boldsymbol{x}_s = (x_i, y_j), \qquad s = (j-1)n + i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

In tal caso,

$$\phi_s(\boldsymbol{x}) = \phi_{(i,j)}(x,y), \qquad s = 1, 2, \ldots, mn,$$



dove $\phi_s(\boldsymbol{x}_r) = \delta_{r,s}$ per $r, s = 1, 2, \ldots, mn$.

Ponendo $u = \sum_{r=1}^{mn} c_r\phi_r$ e $\varphi = \phi_s$, risulta il sistema lineare $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, dove

$$\begin{aligned} A_{sr} &= \iint_\Omega \left([x^2 + y^2]\nabla\phi_s \cdot \nabla\phi_r + xy\phi_s\phi_r\right] dxdy, \\ b_s &= \iint_\Omega f\phi_s \, dxdy. \end{aligned}$$

Poichè

$$(A\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = \iint_\Omega \left([x^2 + y^2] \left\| \sum_{s=1}^{mn} c_s \nabla\phi_s \right\|_2^2 + xy \left| \sum_{s=1}^{mn} c_s\phi_s \right|^2 \right) dxdy \geq 0,$$

la matrice A è reale, simmetrica e sparsa con autovalori non negativi. Se $A\boldsymbol{c} = \vec{0}$, allora

$$(A\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \geq \iint_\Omega \left| \sum_{s=1}^{mn} c_s\phi_s \right|^2 dxdy = 0,$$

e dunque

$$\sum_{s=1}^{mn} c_s\phi_s(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \Omega.$$

Di conseguenza, $c_1 = \ldots = c_{mn} = 0$, implicando l'invertibilità della matrice A.

4. Si ha la seguente mappa di Newton:

$$
\begin{aligned}
F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2-y^2-u \\ 2xy-v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x(x^2+y^2)+xu+yv \\ y(x^2+y^2)-yu+xv \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Allora

$$
F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} (x^2+y^2)^2+(y^2-x^2)u-2xyv & -2xyu+(x^2-y^2)v \\ 2xyu+(y^2-x^2)v & (x^2+y^2)^2+(y^2-x^2)u-2xyv \end{pmatrix}.
$$

Sostituendo

$$
u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy,
$$

si trova $F'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Secondo il Teorema di Ostrowski, esiste un intorno di ciascuna soluzione che è un bacino di attrazione.

Alternativamente, ponendo $z = x + iy$, $w = u + iv$ e $f(z) = z^2 - w$ si può anche scrivere

$$
F(z) = \tfrac{1}{2}z + \frac{w\overline{z}}{|z|^2} = \tfrac{1}{2}z + \frac{w}{2z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.
$$

Dunque

$$
F'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2} = \frac{z^2-w}{2z^2}.
$$

Di conseguenza, se scegliamo $z_0 = x_0 + iy_0$ nel dominio

$$
\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \left|\frac{z^2-w}{2z^2}\right| < 1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (x^2-y^2-u)^2 + (2xy-v)^2 < 4(x^2+y^2)^2\right\},
$$

la successione degli iterati converge allo zero contenuto nello stesso componente connesso.

5. Si ha:

$$
f(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \quad f'(x) = 3(x-2)^2 - 1, \quad f''(x) = 6(x-2).
$$

Quindi il metodo di Newton riguarda l'applicazione ripetuta della seguente mappa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La funzione f ha un massimo in $x = 2 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ e un minimo in $x = 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}$, mentre $f''(x)$ è negativa per $x < 2$ e positiva per $x > 2$. Quindi: Se $x_0 < 2 - \sqrt{\frac{1}{3}}$, la successione degli iterati x_n tende a 1; se $x_0 > 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}$, la successione degli iterati tende a 3.

Sia

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Allora

$$F'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}, \qquad x \neq 2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Nell'intervallo tra $2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ la funzione F è continua, ha un singolo zero (doppio) in $x = 2$ e è decrescente e tende a $\mp\infty$ se $x \to [2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}]^{\mp}$. Inoltre $F'(x)$ tende a $-\infty$ se $x \to [2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}]^{\mp}$. Per $0 \leq \delta < \sqrt{\frac{1}{3}}$, siano ξ_δ e η_δ due numeri reali tali che

$$2 - \sqrt{\tfrac{1}{3}} < \xi_\delta < 2 < \eta_\delta < 2 + \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$-1 + \delta < F'(x) \leq 0$ per $\xi_\delta < x < \eta_\delta$ e $F'(\xi_\delta) = F'(\eta_\delta) = -1 + \delta$. In tal caso

$$|F(x) - F(y)| = |F'(\zeta)(x - y)| \leq (1 - \delta)|x - y|, \qquad x, y \in [\xi_\delta, \eta_\delta],$$

implicando che F è una contrazione in $[\xi_\delta, \eta_\delta]$. Di conseguenza, scegliendo $x_0 \in (\xi_0, \eta_0)$ la successione degli iterati x_n tende a 2.[1]

[1] $x_0 = 2 - \sqrt{\frac{1}{15}[6 - \sqrt{21}]} \approx 1.6926$, $\eta_0 = 2 + \sqrt{\frac{1}{15}[6 - \sqrt{21}]} \approx 2.3074$.