Fondamenti di Fisica Matematica: Secondo parziale
12.12.2014

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
7	7	10	6	6	30

Voto: es.1+es.2+es.3+max(es.4,es.5)

1. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 1 \leq x \leq 3,\ t \geq 0,$$
$$u(1,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, \quad u(x,0) = 1, \quad \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2.$$

   Discutere la risolubilità unica del sistema lineare per i valori di u nei nodi.

2. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$-((16 - x^2)u')' + (x^2 + 1)u = x^4, \qquad 0 \leq x \leq 2,$$
$$u(0) = 0, \qquad u(2) = 2.$$

   Discutere la risolubilità unica del sistema lineare per i coefficienti nello sviluppo in funzioni spline.

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$-\nabla \cdot (e^{-x^2-y^2} \nabla u) + (x^2 + y^2 + 1)u = f, \qquad (x,y) \in \Omega = (0,2) \times (0,4),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Discutere le caratteristiche del sistema lineare ottenuto. Si potrà far partire la discussione dalla seguente formulazione variazionale: Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\iint_\Omega \left[e^{-x^2-y^2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + (x^2+y^2+1) u \varphi \right] dxdy = \iint_\Omega f \varphi \, dxdy.$$

Discutere la risolubilità unica del sistema lineare per i coefficienti nello sviluppo in funzioni spline.

4. Applicare il metodo di Newton per calcolare lo zero $(x, y) = (0, \pi)$ dell'equazione

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} e^x \cos(y) + 1 \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cosa si può dire delle scelta iniziale (x_0, y_0) che garantisce la convergenza e la velocità della convergenza?

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare gli zeri dell'equazione

$$x^2(x-2) = 0.$$

Per ciascuno degli zeri, discutere lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza al tale zero, e la velocità della convergenza.