

Fondamenti di Fisica Matematica: Scritto Generale
23.11.2012

Cognome e nome: Matricola:

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	somma
6	7	6	7	4	30

1. Calcolare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (\lambda + 73)y = 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ y(3) = -2y'(3), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando il peso rispetto a quale sono ortogonali le autofunzioni.

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u_x + 4u, & 0 \leq x \leq 2\pi, t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(2\pi, t) + 2u(2\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 5e^{-2x} \cos\left(\frac{3}{4}x\right), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

3. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo delle differenze finite, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u + \cos^2(\pi x), & 0 \leq x \leq 2, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = x - \frac{1}{4}x^3. \end{aligned}$$

4. Discutere la risoluzione numerica, mediante il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + u &= \sin(\pi x) \sin(\pi y), \\ u(-1, y) &= u(1, y) = u(x, -1) = u(x, 1) = 0, \end{aligned}$$

dove $(x, y) \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} [-1, 1] \times [-1, 1]$.

5. Applicare il metodo di Newton per calcolare il primo zero positivo ξ dell'equazione

$$\sin(x) = \frac{1}{2}x.$$

Discutere lo schema di iterazione, la scelta di x_0 che garantisce la convergenza, e la velocità della convergenza.