Equazioni differenziali: Teoria e Esercizi

Una *equazione differenziale del primo ordine* può esprimirsi sinteticamente con la scrittura

$$u' = F(t, u), \tag{1}$$

dove $F(t, u)$ è una funzione assegnata delle due variabili t ed u, avente per dominio un sottoinsieme del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Una funzione $u = f(t)$, per brevità di notazione $u(t)$ nel seguito, è detta *soluzione* della (1) od anche suo *integrale*, se la soddisfa identicamente, e cioè se per ogni t nel dominio di $f(t)$ risulta

$$u'(t) = F(t, u(t)).$$

Si può dimostrare, sotto ipotesi puramente qualitative per $F(t, u)$ che qui non stiamo a specificare, che *esiste ed è unico un integrale* $u(t)$ *soddisfacente all'assegnata condizione iniziale*

$$u(t_0) = u_0. \tag{2}$$

Ovvero, con linguaggio geometrico: i grafici delle soluzioni non si intersecano mai tra loro, e tuttavia la loro unione nel piano cartesiano esaurisce il dominio di $F(t, u)$.

Tale comportamento delle soluzioni è bene esemplificato dalle seguenti due equazioni per la precisione:

$$u' = g(t) \tag{3}$$

con la condizione iniziale (2), essendo $g(t)$ un'assegnata funzione continua, che ha per soluzione unica

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \tag{4}$$

ed inoltre l'equazione, con r reale fissato:

$$u' = ru \tag{5}$$

con la condizione iniziale (2), che ha per soluzione unica

$$u(t) = u_0 e^{r(t-t_0)}. \tag{6}$$

Senza le condizione iniziale (2) troviamo per l'equazione (3) la famiglia di soluzioni

$$u = \int g(s)\, ds + c, \tag{4$'$}$$

dove l'integrale indefinito sta qui per una qualsiasi primitiva di $g(t)$, e per l'equazione (5) la famiglia di soluzioni

$$u = ce^{rt}. \tag{6$'$}$$

Le formule risolutive (4′) e (6′) contengono una costante reale arbitraria c che si può determinare univocamente sotto la condizione iniziale (2).

Non è possibile esprimere in maniera altrettanto semplice la formula risolutiva per la generica equazione (1); qui di seguito ci limitiamo a considerare altre equazioni particolari che si integrano semplicemente.

1 L'equazione lineare

Incominciamo col considerare l'*equazione lineare*

$$u' = p(t)u + q(t), \tag{7}$$

che generalizza contemporaneamente la (3) e la (5); $p(t)$ e $q(t)$ sono due funzioni assegnate, definite continue in un intervallo aperto.

Mostriamo come l'integrazione della (7) possa sempre ridursi al calcolo di una funzione primitiva. A tale scopo, consideriamo innanzi tutto il caso in cui $q(t)$ è identicamente nulla:

$$u' = p(t)u. \tag{8}$$

L'integrale generale della (8), che viene detta *equazione omogenea associata alla* (7), è dato da

$$u = ce^{\int p(s)\,ds}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

come si verifica direttamente. Infatti, la (8) può essere scritta nella forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \ln |u(t)| = p(t).$$

Le funzioni in (9) non sono certo soluzioni della (7) tuttavia, si riesce a soddisfare la (7) *variando la costante arbitraria* c, ossia sostituendo a questa in (9) una funzione $c(t)$ da determinarsi. Infatti, ponendo

$$u = c(t)e^{\int p(s)\,ds}, \tag{10}$$

calcolando

$$u' = c'(t)e^{\int p(s)\,ds} + c(t)p(t)e^{\int p(s)\,ds}$$

e sostituendo nella (7), otteniamo

$$c'(t)e^{\int p(s)\,ds} + c(t)p(t)e^{\int p(s)\,ds} = c(t)p(t)e^{\int p(s)\,ds} + q(t).$$

Semplificando e risolvendo rispetto a $c'(t)$ abbiamo

$$c' = q(t)e^{-\int p(s)\,ds},$$

e quindi

$$c(x) = \int q(w)e^{-\int p(s)\,ds}\,dw + C,$$

da cui, sostituendo nella (10), si deduce infine

$$u = e^{\int p(s)\,ds}\left[\int q(w)e^{-\int^{w} p(s)\,ds}\,dw + C\right]. \tag{11}$$

La (11), con $C \in \mathbb{R}$, rappresenta l'integrale generale della (7) si vede subito infatti che, assegnata una qualsiasi condizione iniziale (2), si riesce a trovare C in modo che la funzione in (11) la soddisfi. Infatti, la soluzione unica della (7) sotto la condizione iniziale (2) è data da

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds} \left[\int_{t_0}^t q(w) e^{-\int_{t_0}^w p(s)\,ds}\,dw + u_0 \right]. \tag{11$'$}$$

A titolo d'esempio, consideriamo l'equazione

$$u' = tu + t.$$

Incominciamo col calcolare

$$e^{\int s\,ds} = e^{t^2/2},$$

che esprime un integrale dell'omogenea associata. Sostituendo

$$u = c(t) e^{t^2/2}$$

otteniamo dopo una semplificazione dell'equazione

$$c' = t e^{-t^2/2}.$$

Quindi

$$c(t) = -e^{-t^2/2} + C, \quad u(t) = -1 + C e^{t^2/2}.$$

La soluzione unica sotto la condizione iniziale (2) è data da

$$u(t) = -1 + (u_0 + 1) e^{(t^2 - t_0^2)/2} \quad \text{cioè } C = (u_0 + 1) e^{-t_0^2/2}.$$

Un altro esempio è il problema ai valori iniziali (oppure: problema di Cauchy)

$$u' = ru + h(t), \quad u(t_0) = u_0.$$

Osserviamo dapprima che $u = e^{rt}$ è una soluzione dell'omogenea associata. Ponendo $u = c(t) e^{rt}$, troviamo

$$c'(t) = e^{-rt} h(t), \quad c(t_0) = e^{-rt_0} u_0.$$

Finalmente si trova la soluzione unica

$$u(t) = e^{r(t - t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{r(t-s)} h(s)\,ds$$

per qualunque funzione continua $h(t)$.

2 L'equazione a variabili separabili

Consideriamo l'*equazione autonoma* (con secondo membro indipendente da t)

$$u' = h(u), \tag{12}$$

dove supponiamo che $h(u)$ abbia derivata limitata;[1] tale ipotesi garantisce esistenza ed unicità dell'integrale soddisfacente ad una assegnata condizione iniziale.

Osserviamo innanzi tutto che se u_0 è uno zero di $h(u)$, allora la funzione costante $u = u_0$ soddisfa ovviamente la (12); abbiamo dunque gli integrali particolari

$$u = u_0, \quad \text{per ogni } u_0 \text{ con } h(u_0) = 0. \tag{13}$$

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $h(u)$ sia definita in tutto $\mathbb{R}$ e che l'insieme dei suoi zeri sia costituto da un numero finito di punti $u_1, u_2, \ldots, u_n$ con $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$. L'asse delle u ne resta allora diviso in $n+1$ intervalli:

$$I_1 = (-\infty, u_1),\ I_2 = (u_1, u_2), \ldots, I_n = (u_{n-1}, u_n),\ I_{n+1} = (u_n, +\infty),$$

mentre gli n integrali particolari $u = u_1, \ldots, u = u_n$ delimitano nel piano cartesiano le $n+1$ regioni

$$\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}, u \in I_j\}, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Se ora $u(t)$ è un integrale diverso dai precedenti, il suo grafico non potrà intersecare nessuna delle n rette $u = u_1, \ldots, u = u_n$ e risulterà quindi totalmente contenuto in una delle regioni predette. Nel corrispondente intervallo I_j la funzione $h(u)$ risulta o sempre strettamente positiva, o sempre strettamente negativa (altrimenti.

Dunque anche il segno della derivata

$$u' = h(u(t))$$

[1]La condizione che $h(t)$ abbia la derivata limitata, è essenziale per l'esistenza di una soluzione unica della (12) con la condizione iniziale $u(t_0) = 0$. Infatti, l'equazione autonoma $u' = \frac{3}{2}u^{1/3}$ con la condizione iniziale (2) ha le soluzioni

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq c \\ \pm(t-c)^{3/2}, & t \geq c \end{cases}$$

per ciascun $c \geq t_0$.

sarà o sempre positivo, o sempre negativo. Se ne conclude che $u(t)$ è una funzione monotona, o strettamente crescente, o strettamente decrescente, a seconda del segno di $h(u)$ in I_j. Può allora definirsi l'inversa funzionale, che scriveremo con notazione abbreviata $t(u)$; anch'essa risulta strettamente crescente, o strettamente decrescente, continua e derivabile nel punto $u(t)$ con derivata

$$\frac{1}{u'(t)} = \frac{1}{h(u)}.$$

Per trovare $t(u)$ basterà dunque integrare l'equazione

$$t' = \frac{1}{h(u)},$$

che è del tipo (3) con u variabile indipendente; si ottiene perciò

$$t = \int \frac{du}{h(u)} + c. \tag{14}$$

La (14), risolta rispetto ad u, esprime congiuntamente alla (13) tutti gli integrali della (12). Segue dalla (13) e dalla (14) che se $u(t)$ è una soluzione della (12), allora anche la funzione traslata $u(t - c)$ è soluzione, per ogni possibile scelta della costante c.

Per meglio chiarire il significato della formula risolutiva ottenuta, supponiamo di voler determinare la soluzione $u(t)$ soddisfacente alla condizione iniziale $u(t_0) = u_0$. Se u_0 coincide con uno dei valori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ allora la soluzione cercata è semplicemente $u = u_0$. Se invece $u_0 \in I_j$, per un certo indice j, incominciamo col ragionare sulla funzione inversa $t(u)$, per cui risulta $t(u_0) = t_0$; in base alla (14) quest'ultima funzione può esprimirsi nell'intervallo I_j

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{h(v)} + t_0. \tag{15}$$

La (15), risolta rispetto ad u, fornisce la soluzione $u(t)$ cercata. Supponiamo in particolare che il dato iniziale u_0 appartenga all'intervallo limitato $I_j = (u_{j-1}, u_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$; tale intervallo sarà anche il dominio di definizione di $t(u)$. Se inoltre $h(u) > 0$ in I_j, allora si ha

$$\lim_{u \to u_{j-1}^+} t(u) = -\infty, \qquad \lim_{u \to u_j^-} t(u) = +\infty. \tag{16}$$

Tornando alla $u(t)$, se ne deduce che il suo dominio è l'intero asse reale, con

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = u_j, \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = u_{j-1}.$$

Se invece nell'intervallo limitato $I_j = (u_{j-1}, u_j)$ risulta $h(u) < 0$, gli stessi ragionamenti mostrano che

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = u_{j-1}, \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = u_j.$$

La formula (15) consente una facile analisi delle soluzioni anche al variare di u negli intervalli $I_1 = (-\infty, u_1)$, $I_{n+1} = (u_n, +\infty)$. Si osservi in particolare che i valori di $\lim_{u\to+\infty} t(u)$ e $\lim_{u\to-\infty} t(u)$ sono limitati, nel caso esiste l'integrale generalizzato di $1/h(u)$ in un intorno di $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente; il dominio di $u(t)$ si riduce di conseguenza ad un intervallo limitato superiormente od inferiormente. Ciò è bene evidenziato dalla semplice equazione

$$u' = u^2$$

che ha per soluzioni $u = 0$ e

$$t = \int \frac{du}{u^2} + c = -\frac{1}{u} + c$$

nelle regioni $u > 0$ ed $u < 0$. Ad esempio, l'integrale soddisfacente la condizione iniziale $u(0) = u_0 > 0$ si ottiene dalla relazione

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u},$$

che risolta rispetto ad u dà

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - tu_0}.$$

Il dominio di tale soluzione è l'intervallo $(-\infty, 1/u_0)$.

Osserviamo in conclusione che ragionamenti analoghi ai precedenti possono ripetersi per il caso in cui l'insieme degli zeri di $h(u)$ contenga un numero infinito di punti, ed anche quando il dominio di $h(u)$ si riduce ad un intervallo aperto.

Un'equazione più generale della (12), che ancora si può ricondurre al calcolo di una primitiva, è l'*equazione a variabili separabili*

$$u' = g(t)h(u), \tag{17}$$

dove $g(t)$ è una funzione continua, mentre $h(u)$ si suppone derivabile con derivata limitata. Scrivendo la derivata u' con notazione $\dfrac{du}{dt}$, e moltiplicando per dt e dividendo per $h(u)$ i due membri della (17), si ottiene l'identità formale

$$\frac{du}{h(u)} = g(t)\,dt$$

che integrata dà l'identità effettiva

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(t)\,dt + c. \tag{18}$$

Questa è la formula risolutiva della (17), a patto di tener conto anche degli integrali particolari $u = u_0$, per ogni u_0 con $h(u_0) = 0$, e di intendere la (18) risolta rispetto ad u negli intervalli in cui $h(u) \neq 0$. Per dedurre l'unicità della soluzione della (17) con la condizione iniziale (2), si suppone che $h(u)$ abbia la derivata limitata nel suo dominio.

3 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Fino ad ora abbiamo trattato esclusivamente equazioni del primo ordine; possono considerarsi anche equazioni di ordine 2, in cui la derivata seconda u'' compare espressa in funzione di t, u ed u', e più in generale *equazioni differenziali di ordine* n, del tipo

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}). \tag{19}$$

Sotto ipotesi qualitative per F, *esiste ed è unico un integrale* $u(t)$ *della* (19) *soddisfacente alle assegnate condizioni iniziali*

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}. \tag{20}$$

Diciamo *integrale generale* di un'equazione di ordine n un'espressione delle soluzioni del tipo

$$u = f(t, c_1, \dots, c_n),$$

contenente n costanti arbitrarie che, opportunamente particolarizzate, permettono di soddisfare le (20). Da esempio, l'equazione differenziale $u^{(n)} = 0$ ha l'integrale generale

$$u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_n t^{n-1},$$

e le costanti $c_1, \ldots, c_n$ si possono ricavare univocamente dalle (20).

Ci limitiamo qui a considerare un caso particolarissimo, ma assai importante nelle applicazioni: *le equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti*

$$u'' + au' + bu = 0, \tag{21}$$

dove a e b sono costanti reali.

Segue che se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono due soluzioni dell'equazione (21), allora

$$z(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \tag{22}$$

ne è ancora soluzione, per ogni valore delle costanti c_1 e c_2.

Due suoi soluzioni si trovano facilmente provando a soddisfare l'equazione con

$$u = e^{\lambda t}, \tag{23}$$

dove ci riserviamo di fissare in seguito il valore di λ.

Dalla (23) segue

$$u' = \lambda e^{\lambda t}, \quad u'' = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

e perciò, sostituendo nell'equazione (21) e dividendo dal fattore non nullo $e^{\lambda t}$, avremo l'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{24}$$

Se ne conclude che se λ è scelta in modo che la (24) sia soddisfatta, la funzione (23) è soluzione della (21).

Supponiamo inizialmente $a^2 - 4b > 0$; allora l'equazione caratteristica ha due radici reali e distinte, $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$, e l'integrale generale può esprimersi

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{25}$$

Se invece risulta $a^2 - 4b = 0$, e quindi l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia $\lambda = -a/2$, si verifica subito che l'equazione differenziale (21), oltre ad ammettere l'integrale particolare $u_1 = e^{\lambda t}$, ammette anche l'altro

$$u_2 = te^{\lambda t}.$$

Infatti, la sostituzione $u = e^{\lambda t}v$ trasforma l'equazione differenziale nell'equazione $v'' = 0$, che ha la soluzione generale $v = c_1 + c_2 t$. Quindi l'integrale generale può esprimersi

$$u = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t}. \tag{26}$$

Occupiamoci infine del caso $a^2 - 4b < 0$, in cui le radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate: $\lambda = p \pm iq$, con

$$p = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}, \quad q = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} > 0. \tag{27}$$

Sostituendo $u = ve^{pt}$ arriviamo all'equazione differenziale

$$v'' + q^2 v = 0. \tag{28}$$

La soluzione generale della (28) è data da

$$v = c_1 \cos(qt) + c_2 \text{sen}\,(qt). \tag{29}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale originale può esprimersi

$$v = c_1 e^{pt} \cos(qt) + c_2 e^{pt} \text{sen}\,(qt). \tag{30}$$

4 Equazioni differenziali: Applicazioni

1. Decadimento radioattivo. Se indichiamo con $N(t)$ il numero di nuclei radioattivi presenti al tempo t e con $p\,dt$ il numero dei nuclei disintegrati in un periodo piccolo dt, avremo

$$N'(t) = -pN(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

dove la funzione $N(t)$ dovrà essere determinata risolvendo l'equazione (31). Si trovi

$$N(t) = N(0)e^{-pt},$$

dove $N(0)$ è il numero di nuclei radioattivi iniziale.
2. Dinamica delle popolazioni. Uno dei primi modelli della dinamica delle popolazioni si deve a Malthus [”An Essay on the Principle of Population”, 1798]. Sotto l'ipotesi che la popolazione cresca da $r\,dt$ in ogni periodo piccolo dt, si ha l'equazione differenziale

$$u' = ru(t), \quad t > 0,$$

dove $u(t)$ è il numero degli individui al tempo t. Si trova la soluzione

$$u(t) = u(0)e^{rt},$$

dove $u(0)$ è il numero degli individui al tempo iniziale. Purtroppo la cosidetta legge di Malthus vale soltanto per intervalli limitati di tempo.

Verhulst (1837) ha proposto una modifica al modello di Malthus, tenendo conto della carenza progressiva delle risorse al crescere della popolazione. Supponiamo che esista un valore massimo E, detto *popolazione di equilibrio*, superato il quale le risorse non siano più sufficienti per la sopravvivenza di tutti, e la popolazione tenda di conseguenza a diminuire. Se il tasso di crescita è proporzionale alla quantità di risorse ancora disponibili, troviamo l'equazione logistica

$$u'(t) = Ku(t)\left(1 - \frac{u(t)}{E}\right),$$

dove $u(0) > 0$ è la popolazione al tempo iniziale e $K > 0$. Si trova la soluzione

$$u(t) = \frac{Eu(0)}{u(0)[1 - e^{-Kt}] + Ee^{-kt}},$$

e quindi $u(t) \to E$ se $t \to +\infty$.
3. Circuiti elettrici. Consideriamo un circuito elettrico constituito da una resistenza R, un'induttanza L, e un condensatore di capacità C, a cui sia applicata una forza elettromotrice variabile $V(t)$. Se indichiamo con $u(t)$ la carica del condensatore (e quindi da $u'(t)$ la corrente nel circuito), si ha l'equazione differenziale

$$Lu''(t) + Ru' + \frac{1}{C}u(t) = V(t). \tag{32}$$

Cercando una soluzione dell'equazione omogenea del tipo

$$u(t) = Ae^{i\omega t},$$

troviamo l'equazione caratteristica

$$L\omega^2 + R\omega + \frac{1}{C} = 0.$$

Se $\Delta = R^2 - 4(L/C) > 0$, si trova la soluzione decrescente

$$u(t) = e^{-R/2Lt}\left[\text{cost.}_1 e^{t\Delta/2L} + \text{cost.}_2 e^{-t\Delta/2L}\right].$$

Se $\Delta = R^2 - 4(L/C) < 0$, si trova la soluzione oscillante

$$u(t) = Ae^{-R/2Lt}\cos((t\sqrt{-\Delta}/2L) + \varphi).$$

In particolare se $R = 0$, si ha

$$u(t) = A\cos((t\sqrt{-\Delta}/2L) + \varphi),$$

dove A è l'ampiezza e φ è la fase. Se $R^2 - 4(L/C) = 0$, si trova la soluzione

$$u(t) = e^{-R/2L}\left[\text{cost.}_1 + \text{cost.}_2 t\right].$$

5 Esercizi

Equazioni Separabili del tipo $u' = g(t)u$

1. $u' + u = 0$;
2. $u' - 4u = 0$;
3. $u' + t^2u = 0$;
4. $u' - (u/t) = 0$ per $t > 0$;
5. $u' = (1 - t^2)^{-1/2}u$;
6. $u' = \dfrac{3t - 2}{t^2 - 2t - 8}u$ per $-2 < t < 4$;
7. $u' = \dfrac{2t + 1}{t^2 - 2t - 1}$ per $t < 1$;
8. $u' = (\ln t)u$ per $t > 0$;
9. $u' + 2u = 0$, $u(0) = 4$;
10. $u' = (u/2)$, $u(2) = -1$;

11. $u' = \dfrac{t}{t^2+4t-5}u$, $u(0) = 1$;
12. $u' + t(\ln(2t))u = 0$, $u(1/2) = 0$;
13. $u' + \sqrt{1+2t}\,u = 0$, $u(4) = 10$;
14. $u' = \dfrac{1}{t(1-t)}u$, $u(1/4) = 1$.

Equazioni Lineari del Primo Ordine

15. $u' + 2u = t$;
16. $u' - u = \operatorname{sen}(2t)$;
17. $u' + 2tu = 4t$;
18. $t^2u' + tu + 1 = 0$;
19. $tu' - 4u = t + 3t^2$;
20. $u' + (\operatorname{cotg} t)u = 3\operatorname{sen} t \cos t$;
21. $tu' + \dfrac{1}{\ln t}u = 1$ per $t > 0$;
22. $u' = \dfrac{1}{\cos t}u$, $u(\pi/4) = (1/\sqrt{2})$;
23. $u' + |t|u = 0$, $u(0) = 4$;
24. $u' + u = 2t + 5$, $u(0) = 4$;
25. $u' + 4u = 6\operatorname{sen}(2t)$, $u(0) = -3/5$;
26. $u' - 2u + e^{2t} = 0$, $u(0) = 2$;
27. $u' - 2u = t^2e^{2t}$, $u(0) = 2$;
28. $u' - 2tu - t = 0$, $u(0) = 1$;
29. $e^u u' + e^u = 4\operatorname{sen} t$, $u(0) = 0$ (Consiglio: Sia $v = e^u$);
30. $(t^2+1)u' - 2tu = t^2 + 1$, $u(1) = \pi$;
31. $u' - (\operatorname{tg} t)u = e^{\operatorname{sen} t}$, $0 < t < \pi/2$, $u(1) = 0$;
32. $u' + 2tu = e^{-t^2}$, $u(0) = 1$;
33. $u' - 2u = t^2$, $u(0) = 2$;
34. $u' + (2u/t) = (\cos t)/t^2$, $u(\pi) = 0$, $t > 0$;

35. $u' + 3u = 6t$;
36. $u' - u = 4e^{2t}$;
37. $u' - (2u/t) = \operatorname{sen} t$;
38. $u' - \dfrac{t}{t^2+1}u = 1$;
39. $u' - (\operatorname{tg} t)u = 1$;
40. $u' + (u/t) = 2 + (1/t^2)$.

Equazioni separabili

41. $u' = (t^2/u)$;
42. $u' = t^2\sqrt{u}/(1+t^2)$;
43. $u' = e^{t+u}$;
44. $u' = \dfrac{t - tu^2}{u + t^2u}$;
45. $tu' = u^2 - 3u + 2$;
46. $u' = \dfrac{t+1}{u^4+1}$;
47. $u' = te^t/(2u)$;
48. $u' = 1/(\operatorname{tg} t \cos^2 u)$;
49. $t^2uu' = u - 1$;
50. $u' = \dfrac{\ln t \cos u}{t \operatorname{sen} 2u}$;
51. $u' = (\operatorname{sen} t)/u$, $u(0) = -1$;
52. $u' = t^2e^{-u}$, $u(0) = 2$;
53. $u' = 1 - u^2$, $u(0) = 0$;
54. $u' = (u^2 + u)/t$, $u(1) = -1$;
55. $u' = \dfrac{3t^2+2}{2(u-1)}$, $u(0) = -1$;
56. $u' = \sqrt{1-u^2}$, $u(\pi/2) = 0$;
57. $t^2u' - \dfrac{1}{2}\cos 2u = \dfrac{1}{2}$, $u(1) = \pi/4$;

58. $u' = tu^4\sqrt{1+3t^2}$, $u(1) = -1$;

59. $u' = -3u^{4/3}\text{sen}\, t$, $u(\pi/2) = (1/8)$;

60. $u' + \dfrac{4u}{1-t^2} = 0$, $u(2) = 9$.

Equazioni Lineari Omogenee del Secondo Ordine

61. $u'' + 5u' + 6u = 0$;

62. $u'' - 10u' + 25u = 0$;

63. $u'' + 2u' + 5u = 0$;

64. $u'' - 2u' + 5u = 0$;

65. $u'' + 3u' - 10u = 0$;

66. $u'' + 9u = 0$.

67. $u'' - u' - 2u = 0$;

68. $u'' - 4u = 0$;

69. $u'' - 2u' + u = 0$;

70. $u'' + 5u' + 4u = 0$;

71. $u'' = 0$;

72. $u'' + 2u' + 5u = 0$;

73. $u'' + 4u = 0$;

74. $u'' + u = 0$;

75. $u'' + u' - 4u = 0$;

76. $u'' + u = 0$;

77. $u'' - u' - 2u = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$;

78. $u'' - 4u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$;

79. $u'' - 2u' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$;

80. $u'' + 5u' + 4u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$;

81. $u'' + 4u = 0$, $u(\pi) = 0$, $u'(\pi) = 1$;

82. $u'' + u = 0$, $u(\pi/6) = 0$, $u'(\pi/6) = 0$.

83. $u'' - u = 0$;

84. $u'' + 9u = 0;$
85. $u'' - 7u' + 12u = 0;$
86. $u'' - 4u = 0;$
87. $u'' + 4u = 0.$
88. $u'' - u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2;$
89. $u'' + 9u = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1.$
90. $u'' + \omega^2 u = 0$, $u(0) = u'(0) = 0.$
91. $u'' + 4u' + 13u = 0;$
92. $u'' + 3u' + 2u = 0;$
93. $u'' + 4u' + 5u = 0;$
94. $4u'' + 12u' + 9u = 0;$
95. $3u'' + 13u' + 4u = 0;$
96. $u'' + cu' + u = 0$, $c = 2, 0.2, 0.002;$
97. $3u'' + 12u = 0;$
98. $4u'' + 36u = 0;$
99. $u'' + \pi^2 u = 0;$
100. $u'' + u = 0.$