FUNZIONI IPERBOLICHE

Poniamo

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Allora, siccome le derivate delle funzioni e^x e e^{-x} sono uguali ad e^x e $-e^{-x}$, si ha

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x.$$

Inoltre,

$$\operatorname{senh} 0 = 0, \qquad \cosh 0 = 1;$$

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x, \qquad \cosh(-x) = \cosh x.$$

Si ottengono facilmente le seguenti espressioni:

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}, \qquad \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}.$$

Ciò implica che

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1;$$

$$\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \cosh(2x).$$

Eliminando $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ rispettivamente, si ottengono le formula

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 2\operatorname{senh}^2 x + 1.$$

Inoltre,

$$2\operatorname{senh} x \cosh x = 2\,\frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{senh}(2x).$$

Queste formule di duplicazione si possono generalizzare nella seguente maniera:

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y;$$

$$\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y;$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y;$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y.$$

Studiamo ora i grafici delle funzioni $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$. Se $x \to +\infty$, abbiamo $e^{-x} \to 0$ e quindi

$$\operatorname{senh} x \simeq \frac{1}{2}e^x, \qquad \cosh x \simeq \frac{1}{2}e^x, \qquad 0 < \operatorname{senh} x < \frac{1}{2}e^x < \cosh x.$$

D'altra parte, se $x \to -\infty$, abbiamo $e^x \to 0$ e quindi

$$\operatorname{senh} x \simeq -\frac{1}{2}e^{-x}, \qquad \cosh x \simeq \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad 0 > \operatorname{senh} x > -\frac{1}{2}e^{-x} > -\cosh x.$$

Infine discutiamo il seguente limite notevole. Si ha

$$\frac{\sinh x}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{-x}}{x} \to 1, \qquad x \to 0.$$

In modo alternativo risulta con il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = \frac{1}{2}.$$