I. CENNI SULL'ANALISI FUNZIONALE

0 Introduzione

In questo capitolo discutiamo la definizione di un operatore lineare su uno spazio di Banach e di Hilbert e alcune delle sue proprietà. Nell'appendice presentiamo il teorema di Weierstrass sull'approssimazione uniforme delle funzioni continue da polinomi.

Le definizioni di uno spazio di Banach e di Hilbert si trovano nei libri di Pagani-Salsa e Giusti e sono state discusse nell'ambito del corso di analisi matematica 2. La maggior parte dell'analisi funzionale verrà presentata nel corso di isitituzioni di analisi superiore.

1 Spazi di Banach e di Hilbert e Operatori Lineari Limitati

a. Spazi di Hilbert e di Banach. Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso. Un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ si dice una norma se ha le seguenti proprietà:

a. $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$. Inoltre, $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$.

b. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in F$, dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$.

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$ [disuguaglianza triangolare].

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice *spazio normato*. La distanza tra $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$ si definisce come $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. La distanza in uno spazio normato è una metrica.

Una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ se $n, m > \nu$. Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ in cui ogni successione di Cauchy ha limite (cioè, in cui la metrica è completa), si chiama *spazio di Banach*.

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso. Si chiama *prodotto scalare* in X un'applicazione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to F$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) con le seguenti proprietà:

a. $(x, y) = \overline{(y, x)}$[1] per ogni $x, y \in X$.

[1]Se $F = \mathbb{R}$, si legge $\overline{a} = a$ e quindi $(x, y) = (y, x)$.

b. $(\lambda x, y) = (x, \overline{\lambda} y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in F$ e $x, y \in X$.

c. $(x+y, z) = (x, z)+(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$. In tal caso, anche $(z, x+y) = (z, x) + (z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.

d. $(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in X$. Inoltre $(x, x) > 0$ se $x \neq 0$.

Se $(\cdot, \cdot)$ è un prodotto scalare in X, allora

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \qquad x \in X,$$

rappresenta una norma in X. Si dimostrano facilmente la disuguaglianza di Schwartz

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X;$$

la disuguaglianza triangolare

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad x, y \in X;$$

e l'identità del parallelogramma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio prehilbertiano*. Uno spazio vettoriale con prodotto scalare per cui la corrispondente norma è completa, si chiama *spazio di Hilbert*. Quindi ogni spazio di Hilbert è uno spazio di Banach.

Nei libri di fisica il prodotto scalare viene spesso scritto nella forma "braket" (bracket=parentesi) $\langle x|y\rangle$. Purtroppo, invece di $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) = (x, \overline{\lambda} y)$ i fisici addottano la regola $\langle \overline{\lambda} x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle = \langle x|\lambda y\rangle$.

1.1. Si dimostrino la disuguagliaza di Schwartz e la disuguaglianza triangolare. Si consiglia considerare il discriminante del polinomio quadrato $\|y + wx\|^2 = (x, x)w^2 + \{(x, y) + (y, x)\}\, w + (y, y)$, dove $w \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$, per dimostrare la disuguaglianza di Schwartz. Quella triangolare ne segue facilmente.

1.2. Dimostrare l'identità del parallelogramma. Spiegare il nome di questa identità.

1.3. Sia X uno spazio prehilbertiano. Si dimostri che

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |(x, y)| = \max_{\|y\|=1} |(x, y)|.$$

1.4. Sia X uno spazio di Hilbert e sia M uno sottospazio lineare di X. Sia

$$M^\perp = \{x \in X : (x, y) = 0 \text{ per ogni } y \in M\}$$

il suo cosiddetto *complementare ortogonale*. Si dimostri che $M^\perp$ è uno sottospazio lineare chiuso di X, $(M^\perp)^\perp$ è la chiusura di M, e $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Un esempio di uno spazio di Hilbert reale è $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, dove $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. L'esempio analogo nell'ambito degli spazi complessi è $\mathbb{C}^n$ con prodotto scalare $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, dove $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$.

Consideriamo due esempi meno elementari. Sia G un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Sull'insieme delle funzioni misurabili da G in $\mathbb{C}$, introduciamo la relazione di equivalenza

$$f \sim g \Longleftrightarrow \{x \in G : f(x) \neq g(x)\} \text{ ha misura zero.}$$

Questa relazione divide l'insieme delle funzioni misurabili in G in classi disgiunte due a due. Infatti identifichiamo due funzioni se coincidono fuori di un insieme di misura zero. Definiamo ora due spazi vettoriali. $L_1(G)$ sarà lo spazio vettoriale (reale o complesso) di tutte le classi di equivalenza di funzioni $f : G \to \mathbb{R}$ (oppure $f : G \to \mathbb{C}$) tali che l'espressione

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\, dx$$

sia finita. $L_2(G)$ sarà lo spazio vettoriale (reale o complesso) di tutte le classi di equivalenza di funzioni $f : G \to \mathbb{R}$ (oppure $f : G \to \mathbb{C}$) tali che l'espressione

$$\|f\|_2 = \left[\int_G |f(x)|^2\, dx\right]^{1/2}$$

sia finita. Si può dimostrare che $L_1(G)$ e $L_2(G)$ sono spazi di Banach. Inoltre, definendo

$$(f,g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

si dimostra che $L_2(G)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. La dimostrazione della completezza di questi due spazi verrà svolta nel corso di istituzioni di analisi superiore.

1.5. Dimostrare che $L_1(G)$ è uno spazio normato e che $L_2(G)$ è uno spazio prehilbertiano. Si utilizzi il fatto che per una funzione misurabile e non negativa $g : G \to \mathbb{R}$, $\int_G g(x)\, dx = 0$ se e solo se $g(x) = 0$ quasi ovunque in G [cioè, se e solo se $\{x \in G : g(x) \neq 0\}$ ha misura zero].

Il prossimo spazio da introdurre è lo spazio $C(K)$. Sia K un insieme compatto (cioè, chiuso e limitato) in $\mathbb{R}^n$. Allora lo spazio vettoriale $C(K)$ di tutte le funzioni continue $f : K \to F$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) con la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach. Di nuovo non dimostriamo la completezza della corrispondente metrica. Nel caso in cui K è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$ (non necessariamente compatto), definiamo $C(K)$ come lo spazio vettoriale di tutte le funzioni continue e limitate $f : K \to F$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Questo spazio è uno spazio di Banach. Nel caso in cui l'insieme K è compatto, le due definizioni di $C(K)$ coincidono, poichè su un compatto K l'estremo superiore di una funzione continua è un massimo [secondo il teorema di Weierstrass].

Infine, introduciamo due spazi di successioni. Consideriamo le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ di numeri reali o complessi. Definiamo ℓ_1 come lo spazio di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ è assolutamente convergente. Su ℓ_1 mettiamo la norma

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|.$$

Sia ℓ_2 lo spazio di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Su ℓ_2 mettiamo la norma

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \left[\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\right]^{1/2}.$$

Si può dimostrare che ℓ_1 e ℓ_2 sono spazi di Banach. Inoltre, se mettiamo su ℓ_2 il prodotto scalare

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n},$$

ℓ_2 sarà uno spazio di Hilbert.

Nella stessa maniera introduciamo gli spazi $\ell_1(\mathbf{Z})$ e $\ell_2(\mathbf{Z})$ di successioni "bi-infinite" $\{x_n\}_{n=-\infty}^\infty$.

1.6. Si dimostri la completezza delle norme su ℓ_1 e ℓ_2.

b. Operatori Lineari. Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \to Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\mathrm{Im}\,(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y. Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\mathrm{Ker}\, T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

1.7. Si dimostri che $\mathrm{Ker}\, T$ e $\mathrm{Im}\, T$ sono sottospazi lineari.

Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y.

Proposizione 1.1 *Un operatore lineare $T : X \to Y$ è invertibile se e solo se $Im T = Y$ e $Ker T = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, si ha ovviamente $\operatorname{Im} T = Y$ e $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. D'altra parte, se $\operatorname{Im} T = Y$ e $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, per ogni $y \in Y$ l'equazione $Tx = y$ ha almeno una soluzione $x \in X$ (poichè $\operatorname{Im} T = Y$). Se ci fossero $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$, allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$ (poichè $\operatorname{Ker} T = \{0\}$) e $x_1 = x_2$. Quindi la soluzione $x \in X$ dell'equazione $Tx = y$ è unica per ogni $y \in Y$. $\square$

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X,\ \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T. Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato.

1.8. Sia $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonica di F^n. Allora ogni operatore limitato $T : F^n \to Y$ può essere rappresentato come

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i.$$

Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T.

1.9. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \to Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Si dimostri questo fatto.

Proposizione 1.2 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. T è un operatore limitato.

b. $T : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua.

c. $T : X \to Y$ è una funzione continua.

d. $T : X \to Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a)$\Longrightarrow$(b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(d)] Ovvio.

[(d)$\Longrightarrow$(a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. □

Consideriamo adesso lo spazio normato $\mathcal{L}(X,Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y, dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Se $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X,Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $n \times m$.

Proposizione 1.3 *Siano X, Y spazi di Banach. Allora $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$. In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ per $n, m > \nu$. Per $x \in X$ abbiamo la successione di Cauchy $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ in Y. Per $x = 0$ questo è chiaro. Per $x \neq 0$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$ se $n, m > \nu$, mentre $\varepsilon\|x\|$ è una costante positiva arbitraria. Siccome Y è uno spazio completo, esiste, per ogni $x \in X$, un vettore $Tx \in Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$. Si dimostra facilmente che T è un operatore lineare. Inoltre, per quel $\nu = \nu(\varepsilon)$ si ha $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$ (calcolando il limite se $m \to \infty$). Quindi per un opportuno $n_0 > \nu$ si ha

$$\|Tx\| \leq \|T_{n_0} x - Tx\| + \|T_{n_0}\|\|x\| \leq (\varepsilon + \|T_{n_0}\|)\, \|x\|, \qquad x \in X,$$

implicando la limitatezza di T. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$, si ha $\|T_n - T\| \to 0$ se $n \to \infty$. In altre parole, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ è convergente in $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Discutiamo due esempi.

a. Sullo spazio ℓ_1 definiamo l'operatore A come

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x_j, \qquad \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty},$$

dove $\{a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ è una matrice infinita. Allora A è limitato se

$$\|A\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,j}| < +\infty.$$

Infatti, sotto questa condizione abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |(A\mathbf{x})_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}||x_j| \leq \|A\| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|A\|\|\mathbf{x}\|_1.$$

Abbiamo infatti trovato il valore esatto della norma di A, ma questo non verrà dimostrato.

b. Sullo spazio $L_2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G definiamo l'operatore M da

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G.$$

Allora hf è misurabile se f è misurabile. Inoltre,

$$\|hf\|^2 = \int_G |h(x)f(x)|^2 \, dx \leq \|h\|_\infty^2 \int_G |f(x)|^2 \, dx = \|h\|_\infty^2 \|f\|_2^2,$$

dove $\|h\|_\infty = \sup_{x \in G} |h(x)|$. Quindi M è limitato su $L_2(G)$. Si dimostra nella stessa maniera che M è limitato su $L_1(G)$. In entrambi i casi $\|h\|_\infty$ è un maggiorante della norma di M. Infatti $\|h\|_\infty$ è il valore esatto della norma, ma questo non verrà dimostrato.

Finora tutte le dimostrazioni sono state abbastanza elementari. Il prossimo teorema non è facile da dimostrare e richiede una certa proprietà topologica (quella di Baire) degli spazi metrici completi. Comunque verrà dimostrato nel corso di istituzioni di analisi superiore. Basta dire che il prossimo teorema non vale più se uno degli spazi X, Y non è completo.

Teorema 1.4 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Tornando al teorema precedente, è impossibile ottenere una stima della norma dell'operatore lineare T^{-1} da quella per T. Infatti, non è neanche possibile per le matrici.

Il prossimo teorema fornisce un algoritmo per dimostrare l'invertibilità di un operatore limitato e per calcolare (almeno in principio) la sua inversa. L'operatore inverso verrà costruito come la somma della cosiddetta *serie di Neumann* che generalizza la serie geometrica. Abbiamo bisogno dell'operatore d'identità I_X (oppure I se non c'è pericolo di confusione) su uno spazio di Banach X: Si definisca $I_X x = x$ per ogni $x \in X$.

Teorema 1.5 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora T è invertibile se $\|I - T\| < 1$. In tal caso*

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I - T)^j,$$

dove $(I - T)^0 = I_X$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali

$$S_n = I + (I - T) + (I - T)^2 + \cdots + (I - T)^n = \sum_{j=0}^{n} (I - T)^j.$$

Si vede subito (o quasi subito) che

$$TS_n = S_nT = S_n - (I - T)S_n = S_n - S_{n+1} + I. \tag{1.1}$$

Adesso facciamo la stima [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} (I - T)^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} \|I - T\|^j \leq \frac{\|I - T\|^{n+1}}{1 - \|I - T\|},$$

ciò implica che $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$. Dalla Proposizione 1.3 segue l'esistenza di $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|S_n - S\| \to 0$ se $n \to \infty$. Calcolando il limite in (1.1) se $n \to \infty$, otteniamo

$$TS = ST = S - (I - T)S = S - S + I.$$

Di conseguenza $TS = ST = I$, cioè $S = T^{-1}$. □

Dalla serie di Neumann si ottiene facilmente

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

se $\|I - T\| < 1$.

Corollario 1.6 *Siano X, Y spazi di Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e T invertibile. Se*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

allora S è invertibile. In altre parole, l'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Ovviamente, $T^{-1}S \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre,

$$\left\|I_X - T^{-1}S\right\| = \left\|T^{-1}[T - S]\right\| \leq \|T^{-1}\|\|T - S\| < \|T^{-1}\|\|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

implica (secondo il teorema precedente) che $T^{-1}S$ è invertibile. In tal caso S è invertibile. □

c. Spettro di un operatore lineare. Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ.

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ, più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$

per trovare tutti gli autovalori di T. Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T, $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T. Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T, $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema 1.7 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un compatto in $\mathbb{C}$, mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto non limitato.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Se $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\mu \in \rho(T)$. Questo segue subito dal Corollario 1.6, poichè $(\mu - \lambda)I_X = (\mu - T) - (\lambda - T)$. Quindi $\rho(T)$ è un aperto in $\mathbb{C}$.

Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{1.2}$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è un insieme chiuso contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$. Dunque $\sigma(T)$ è un compatto. □

Utilizzando il teorema di Liouville dell'analisi complessa e il teorema di Hahn-Banach dell'analisi funzionale [Vedi: istituzioni di analisi superiore], si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto. Quindi il suo risolvente non è mai l'intero piano complesso.

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T, il minimo di tutti gli r per cui la serie (1.2) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T. Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze [analisi 2], troviamo

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Invece del massimo limite si ottiene il limite. La dimostrazione completa delle affermazioni sul raggio spettrale richiede l'analisi complessa.

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi due a due disgiunti.

a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.

b. Se $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\operatorname{Im}(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T. In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.

c. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X, si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].

d. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T. L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

   Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

   del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

Facciamo un esempio. Sia G un compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $h : G \to F$ ($F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) una funzione continua. Allora l'operatore

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G,$$

è limitato su $C(K)$ con norma $\|M\| = \|h\|_\infty$. Si controllino le seguenti affermazioni:

a. $\lambda \in \rho(M)$ se e solo se $h(x) = \lambda$ per nessun $x \in G$. In tal caso, $[(\lambda - M)^{-1}f](x) = f(x)/(\lambda - h(x))$ per $x \in G$. Questo significa che lo spettro di M coincide con l'insieme di tutti i valori della funzione h.

b. Lo spettro residuo è vuoto. Se λ è un valore di h (cioè, se $\lambda \in \sigma(M)$), λ è un autovalore di M se l'insieme chiuso $C = \{x \in G : h(x) \neq \lambda\}$ non è denso in G e λ appartiene allo spettro continuo di M se quell'insieme C è denso in G e non coincide con G. Infatti, se cerchiamo di risolvere l'equazione $(\lambda - h(x))f(x) = 0$ per $x \in G$, troviamo $f(x) = 0$ per ogni $x \in C$. Se C fosse denso in G, troveremmo $f(x) = 0$ per ogni $x \in G$; quindi $\lambda \notin \sigma_p(M)$.

Facciamo un altro esempio. Sullo spazio $L_2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G consideriamo l'operatore

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G.$$

Si controllino le seguenti cose facilmente:

a. $\lambda \in \rho(M)$ se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|h(x) - \lambda| \geq \varepsilon$ per quasi ogni $x \in G$. In tal caso

$$[(\lambda - M)^{-1}f](x) = \frac{f(x)}{\lambda - h(x)}, \qquad x \in G.$$

b. $\lambda \in \sigma_p(M)$ [λ autovalore] se e solo se l'insieme $\{x \in G : h(x) = \lambda\}$ ha misura positiva. I corrispondenti autovettori sono esattamente le funzioni $f \in L_2(G)$ tale che $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in G$ per cui $h(x) \neq \lambda$.

c. $\lambda \in \sigma_c(M)$ se $\{x \in G : h(x) = \lambda\}$ ha misura zero e $\{x \in G : |h(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ ha misura positiva per ogni $\varepsilon > 0$.

d. Lo spettro residuo $\sigma_r(M)$ è vuoto.

Si trovano gli stessi risultati per l'operatore M definito su $L_1(G)$.

Nella maggior parte delle applicazioni gli operatori lineari non hanno nessuno spettro residuo. Purtroppo esistono esempi (anche esempi elementari) di operatori lineari limitati con spettro residuo.

Per determinare lo spettro continuo più facilmente, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 1.8 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia $\sigma_{ap}(T)$*[2] *l'insieme di tutti i λ tali che $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ per un'opportuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\| = 1$. Allora*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $0 \neq x \in X$ è un corrispondente autovettore, prendiamo $x_n = (x/\|x\|)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso $(\lambda - T)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\lambda \in \alpha_{ap}(T)$. Quindi $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon$ se $\|x\| = 1$. In tal caso si ha

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|, \qquad x \in X.$$

Quindi λ non è un autovalore di T. Se $y \in \operatorname{Im}(\lambda - T)$, esiste un unico vettore $x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = y$. In tal caso

$$\|(\lambda - T)^{-1}y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\|, \qquad y \in \operatorname{Im}(\lambda - T). \tag{1.3}$$

Se $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ non è denso in X, ne segue che $\lambda \in \sigma_r(T)$. Se $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ è denso in X, la stima (1.3) si estende ad $y \in X$ per continuità, e dunque $\lambda \in \rho(T)$. In altre parole, $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$, oppure $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \rho(T)$, esistono $M, m > 0$ tali che $M\|x\| \geq \|(\lambda - T)x\| \geq m\|x\|$ per ogni $x \in X$ (infatti, $M = \|\lambda - T\|$ e $m = \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$). Quindi se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione con $\|x_n\| = 1$, non si ha $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Ne segue che $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. □

d. Operatori Lineari Autoaggiunti. Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in X.$$

[2] L'insieme si dice "approximate point spectrum". Si può infatti dimostrare che $\sigma_{ap}(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

Utilizzando l'esercizio 1.3 si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< T^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< x, Ty >| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

1.10. Si dimostrino le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ [$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ in uno spazio di Hilbert reale], $(T + S)^* = T^* + S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.

b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.

c. Gli operatori *normali*: $TT^* = T^*T$. Osserviamo che gli operatori autoaggiunti e unitari sono ambedue normali.

1.11. Sia X uno spazio di Hilbert *complesso* e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si dimostri che T è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$. Si consiglia sviluppare il prodotto scalare $(T(x + iy), x + iy)$ per $x, y \in X$, utilizzando che $(Tz, z) \in \mathbb{R}$ per $z = x$, $z = y$ e $z = x + iy$. Il risultato non vale in uno spazio di Hilbert reale.

Teorema 1.9 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Secondo il Lemma 1.8 esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$. Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\|\|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X, esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\overline{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\overline{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (1.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo compatto più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \qquad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \leq ((\lambda - T)x, x) \leq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. $\square$

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo compatto reale più piccolo che contiene lo spettro di T. In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema 1.10 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \to \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. $\square$

A Approssimazione delle funzioni continue da polinomi

Teorema A.1 [Weierstrass][3] *Se f è una funzione complessa, continua in $[a, b]$, esiste una successione di polinomi P_n tale che*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformemente in $[a, b]$. Se f è reale, si possono prendere i P_n reali.

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che $[a, b] = [0, 1]$. Possiamo inoltre supporre che $f(0) = f(1) = 0$. Perchè, se il teorema è dimostrato in questo caso, si consideri

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \qquad 0 \le x \le 1.$$

Allora $g(0) = g(1) = 0$ e, se g può essere ottenuto come limite di una successione uniformemente convergente di polinomi, è chiaro che lo stesso vale per f, visto che $f - g$ è un polinomio.

Inoltre, per definizione, poniamo $f(x)$ uguale a zero per x fuori da $[0, 1]$. Allora f è uniformemente continua su tutta la retta reale.

Poniamo

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove c_n è scelto in modo tale che

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{A.1}$$

Abbiamo bisogno di alcune informazioni sull'ordine di grandezza dei c_n. Dal momento che

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx &= 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\, dx \\ &\ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\, dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

dalla (A.1) segue che

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{A.2}$$

Si può facilmente dimostrare la disuguaglianza $(1 - x^2)^n \ge 1 - nx^2$ che abbiamo usato prima.[4]

Per ogni $\delta > 0$, la (A.2) implica

$$Q_n(x) \le \sqrt{n}\,(1 - \delta^2)^n, \qquad \delta \le |x| \le 1, \tag{A.3}$$

[3] Noi diamo la dimostrazione presentata in: W. Rudin, *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill, 1976; Teorema 7.26.

[4] È un corollario della disuguaglianza di Bernouilli.

e quindi $Q_n \to 0$ uniformemente in $\delta \le |x| \le 1$.

Sia ora

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Le ipotesi su f ci permettono di dimostrare, con un semplice cambio di variabile, che

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(t) Q_n(t-x)\, dt,$$

e l'ultimo integrale è chiaramente un polinomio in x. Perciò la $\{P_n\}$ è una successione di polinomi che sono reali se f è reale.

Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta > 0$ tale che per $|y-x| < \delta$ si ha

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $M = \sup |f(x)|$. Servendoci dalla (A.1), della (A.3) e della relazione $Q_n(x) \ge 0$, vediamo che, per $0 \le x \le 1$,

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t)\, dt \right| \le \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \\
&\le 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \\
&\le 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

per n abbastanza grande; il che conclude la dimostrazione del teorema. □

2.1. Sia $P_0 = 0$ e si definisca, per $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n(x)^2}{2}.$$

Si dimostri che $P_n(x) \to |x|$ uniformemente in $[-1,1]$. Si suggerisce l'uso dell'identità

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)] \left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2} \right]$$

per dimostrare che $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ se $x \in [-1,1]$ e che

$$|x| - P_n(x) \le |x| \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^n < \frac{2}{n+1}, \qquad x \in [-1,1].$$