La Forma Normale di Jordan e le sue Applicazioni

1. Le matrici quadrate. Sia A una matrice quadrata. Allora $\{x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}\}$ si dice *catena di Jordan* della matrice A corrispondente all'autovalore λ se $x_0 \neq 0$ e

$$Ax_0 = \lambda x_0,\ Ax_1 = \lambda x_1 + x_0,\ Ax_2 = \lambda x_2 + x_1, \cdots,\ Ax_{r-1} = \lambda x_{r-1} + x_{r-2}.$$

In tal caso λ è autovalore di A e x_0 un corrispondente autovettore. L'intero r si dice la lunghezza della catena. Limitandoci al sottospazio delle combinazioni lineari di $x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}$, la matrice della trasformazione lineare rispetto alla base $\{x_0, \cdots, x_{r-1}\}$ (del sottospazio) ha la forma di un cossiddetto "blocco" di Jordan:

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Prendiamo la catena di Jordan più lunga corrispondente all'autovalore λ di A, di lunghezza r_1. Poi prendiamo un autovettore di A corrispondente all'autovalore λ fuori del sottospazio delle combinazioni lineari dei vettori della catena, per cui la lunghezza della catena di Jordan è massima. Ripetendo questa procedura, si arriva ad un numero finito m di catene di Jordan di A corrispondenti all'autovalore λ di lunghezze $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$ tali che m è la dimensione del sottospazio $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda) = \{x : Ax = \lambda x\}$. Indicando queste catene di Jordan da $\{x_{0j}, x_{1j}, \cdots, x_{r_j-1,j}\}$ $(1 \leq j \leq m)$, la matrice della trasformazione lineare rispetto alla base $\{x_{01}, \cdots, x_{m,r_m-1}\}$ ha la forma

$$J_{r_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{r_m}(\lambda).$$

Ripetendo questo ragionamento per tutti gli autovalori della matrice A, si costruisce una base rispetto a cui la trasformazione lineare ha come la sua matrice una somma diretto di "blocchi" di Jordan. In altre parole, ogni matrice è simile ad una somma diretta di blocchi di Jordan. Questa somma diretta si chiama la forma normale di Jordan della matrice A. Due matrici sono simili se hanno la stessa forma normale di Jordan (tranne l'ordine dei blocchi). Se ci sono blocchi di Jordan di lunghezza $r_1, \cdots, r_m$ corrispondenti all'autovalore λ, si ha

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda)^\sigma = \sum_{j=1}^{m} \min(r_j, \sigma), \qquad \sigma = 1, 2, 3, \cdots.$$

Se A è autoaggiunta (cioè, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$), ogni catena di Jordan della A ha lunghezza 1. Infatti, ci ricordiamo che gli autovalori della A sono reali. In tal caso, se $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ fosse una catena di Jordan della A corrispondente all'autovalore reale λ, allora $A\varphi_0 = \lambda\varphi_0$ e $A\varphi_1 = \lambda\varphi_1 + \varphi_0$, e dunque

$$\|\varphi_0\|^2 = (\varphi_0, \varphi_0) = (A\varphi_1, \varphi_0) - (\lambda\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_1, A\varphi_0) - (\varphi_1, \lambda\varphi_0) = 0,$$

che implica $\varphi_0 = 0$.

2. Gli operatori differenziali. Consideriamo ora l'operatore differenziale

$$Lu = u^{(r)} + a_1 u^{(r-1)} + \cdots + a_{r-1}u' + a_r u$$

a coefficienti costanti e le soluzioni dell'equazione differenziale

$$Lu = 0.$$

Allora esistono soluzioni non banali se e solo se λ è una radice dell'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_{r-1}\lambda + a_r = 0.$$

In tal caso $e^{\lambda t}$ è una soluzione non banale. Introducendo il vettore colonna U con elementi $u, u', \cdots, u^{(r-1)}$, arriviamo al sistema lineare

$$U'(t) = C_L U(t),$$

dove C_L è la matrice compagna ("companion matrix")

$$C_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ -a_r & -a_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Si controlla facilmente che il vettore colonna con elementi $y_0, \cdots, y_{r-1}$ è autovettore corrispondente all'autovalore λ, se e solo se

$$y_0 \neq 0,\ y_1 = \lambda y_0,\ y_2 = \lambda^2 y_0, \cdots, y_{r-1} = \lambda^{r-1} y_0,\ p(\lambda) y_0 = 0.$$

Ciò è possibile soltanto se $p(\lambda) = 0$. Se

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

per $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ diversi, allora la forma normale di Jordan della matrice C_L è

$$J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{r_m}(\lambda_m),$$

cioè c'è un singolo blocco di Jordan per ogni autovalore (poichè gli autospazi Ker $(C_L - \lambda_j)$, $j = 1, \cdots, m$, hanno dimensione 1). Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ è

$$\{t^\mu e^{\lambda_j t} : \mu = 0, 1, \cdots, r_j - 1,\ j = 1, \cdots, m\}.$$

3. Le equazioni integrali. Adesso consideriamo l'equazione integrale di nucleo degenere

$$\varphi = \lambda K\varphi + f,$$

dove $\mathcal{K}(x,y) = \sum_{j=1}^n f_j(x)\overline{g_j(y)}$ e $\{f_1, \cdots, f_n\}$ e $\{g_1, \cdots, g_n\}$ sono due insiemi di n funzioni continue su $\overline{G}$ che sono linearmente indipendenti. Scrivendo $\zeta = 1/\lambda$ per $\lambda \neq 0$, convertendo l'equazione integrale nella forma $\zeta\varphi = K\varphi + \zeta f$, $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{r-1}\}$ è una catena di Jordan per l'operatore K corrispondente all'autovalore ζ se

$$K\varphi_0 = \zeta\varphi_0,\ K\varphi_1 = \zeta\varphi_1 + \varphi_0, \cdots, K\varphi_{r-1} = \zeta\varphi_{r-1} + \varphi_{r-2}.$$

Sostituendo $\lambda = 1/\zeta$ otteniamo

$$\lambda K\varphi_0 = \varphi_0,\ \lambda K\varphi_1 = \varphi_1 + \lambda\varphi_0, \cdots, \lambda K\varphi_{r-1} = \varphi_{r-1} + \lambda\varphi_{r-2}.$$

In altre parole,

$$\varphi_0 = \lambda \sum_{s=1}^n (\varphi_0, g_s) f_s,\ \varphi_1 + \lambda\varphi_0 = \lambda \sum_{s=1}^n (\varphi_1, g_s) f_s, \cdots,$$

$$\varphi_{r-1} + \lambda\varphi_{r-2} = \lambda \sum_{s=1}^n (\varphi_{r-1}, g_s)\varphi_s.$$

Introducendo la matrice A con elementi $A_{js} = (f_s, g_j)$ ed i vettori $(\mathbf{c}^{(i)})_{s=1}^n = (\varphi_i, g_s)$, otteniamo

$$\mathbf{c}^{(0)} = \lambda A\mathbf{c}^{(0)},\ \mathbf{c}^{(1)} = \lambda A\mathbf{c}^{(1)} + \lambda\mathbf{c}^{(0)},\ \mathbf{c}^{(r-1)} = \lambda A\mathbf{c}^{(r-1)} + \lambda\mathbf{c}^{(r-2)}.$$

Sostituendo $\zeta = 1/\lambda$ risulta

$$\zeta\mathbf{c}^{(0)} = A\mathbf{c}^{(0)},\ \zeta\mathbf{c}^{(1)} = A\mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(0)},\ \zeta\mathbf{c}^{(r-1)} = A\mathbf{c}^{(r-1)} + \mathbf{c}^{(r-2)}.$$

Oppure: $\{\mathbf{c}^{(0)}, \cdots, \mathbf{c}^{(r-1)}\}$ è una catena di Jordan della A corrispondente all'autovalore $1/\lambda$.

La riduzione di un'equazione integrale di nucleo degenere ad un sistema lineare dimostra che un operatore integrale di nucleo degenere hermitiano non ha catene di Jordan di lunghezza ≥ 2 (poichè la corrispondente matrice A è autoaggiunta). Siccome un'equazione integrale di nucleo non degenere e hermitiano può essere ricondotta ad un'equazione integrale di nucleo degenere e hermitiano, tale equazione non può avere catene di Jordan di lunghezza ≥ 2 (anche se il nucleo è non degenere).