

## VI. POLINOMI ORTOGONALI

### 1 Definizioni e Risultati Generali

Sia  $I$  un intervallo della retta reale, sia limitato sia non limitato. Sia  $\rho(x)$  una funzione non negativa e misurabile su  $I$  tale che  $\int_I \rho(x) dx < +\infty$  e  $\rho(x) > 0$  quasi ovunque. Sia  $L_2(I; \rho(x)dx)$  lo spazio di Hilbert di tutte le funzioni misurabili (identificando le funzioni uguali quasi ovunque)  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $\int_I |f|^2 \rho dx < +\infty$ , con prodotto scalare

$$(f, g)_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx.$$

Inoltre supponiamo che gli integrali  $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).<sup>1</sup> Quest'ipotesi implica che tutti i polinomi appartengono ad  $L_2(I; \rho(x) dx)$ .

Partendo dalla successione  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  di funzioni linearmente indipendenti, possiamo applicare il processo di Gram-Schmidt, cioè lo schema ricorrente

$$p_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|_\rho}, \quad p_{n+1} = \frac{e_{n+1} - \sum_{j=0}^n (e_{n+1}, p_j)_\rho p_j}{\|e_{n+1} - \sum_{j=0}^n (e_{n+1}, p_j)_\rho p_j\|_\rho},$$

dove  $e_j(x) = x^j$  per  $j \geq 0$ , per costruire una successione  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  con le seguenti proprietà:

1. I polinomi  $p_n(x)$  sono reali.
2. Il grado del polinomio  $p_n(x)$  è uguale ad  $n$ .
3. Il coefficiente principale di  $p_n(x)$  (cioè, quello di  $x^n$ ) è positivo.
4. I polinomi sono ortonormali, cioè

$$(p_n, p_m)_\rho = \int_I p_n(x) \overline{p_m(x)} \rho(x) dx = \delta_{n,m}.$$

Siccome l'insieme dei polinomi è denso in  $L_2(I; \rho(x)dx)$  [Non lo dimostremo!], risulta una base ortonormale dello spazio di Hilbert  $L_2(I; \rho(x)dx)$ .

---

<sup>1</sup>Se  $I$  è limitato, quest'ipotesi vale automaticamente.

Esiste un'unica successione di polinomi  $p_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) con le proprietà (1)-(4). Questi polinomi si chiamano i *polinomi ortogonali* rispetto al prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)_\rho$  (oppure rispetto al "peso"  $\rho(x)$ ).

**Lemma 1.1** *Si ha  $(f, p_n)_\rho = 0$  per ciascun polinomio  $f$  di grado  $< n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f$  un polinomio di grado  $< n$ . Allora  $f$  è una combinazione lineare dei polinomi  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ . Siccome  $(p_j, p_n)_\rho = 0$  per  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , risulta  $(f, p_n)_\rho = 0$ .  $\square$

**Teorema 1.2** *Gli zeri del polinomio  $p_n$  sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo  $I$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $I = (a, b)$  dove  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Supponiamo che  $p_n$  ha  $m$  (con  $m < n$ ) zeri  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  in  $(a, b)$  e  $n - m$  zeri in  $\mathbb{C} \setminus (a, b)$ . Allora  $p_n$  ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)q(x),$$

dove  $q$  è un polinomio di grado  $n - m$  che non cambia segno in  $(a, b)$ ; dunque  $q(x) \geq 0$  per  $x \in (a, b)$ . Consideriamo il polinomio  $f$  definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma 1.1 risulta  $(f, p_n)_\rho = 0$ . In particolare,

$$0 = (f, p_n)_\rho = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che  $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) = 0$  quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di  $p_n$  appartengono ad  $(a, b)$ .

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di  $p_n$ , rappresentiamo  $p_n$  come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove  $\beta_1, \dots, \beta_r$  sono gli zeri distinti di  $p_n$  e  $m_1 + \dots + m_r = n$ . Bisogna dimostrare che  $r = n$ ,  $m_1 = \dots = m_n = 1$  e  $c > 0$ . Se esiste un indice  $j$  con  $m_j > 1$ , definiamo  $n_j = 0$  se  $m_j$  è pari e  $n_j = 1$  se  $m_j$  è dispari (cioè, se  $m_j = 3, 5, 7, \dots$ ). Poi consideriamo il polinomio  $g$  definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di  $g$  è strettamente minore di  $n$ , si ha  $(g, p_n)_\rho = 0$ . In altre parole

$$0 = c \int_I (x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r},$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa.<sup>2</sup> Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude che tutti gli  $n$  zeri di  $p_n$  sono semplici.  $\square$

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini. Se si conoscono i coefficienti in tale relazione, risulta un metodo veloce (in particolare, dal punto di vista numerico) per calcolarli.

**Teorema 1.3** Sia  $\alpha_n = (xp_{n+1}, p_n)_\rho$ ,  $c_n = (xp_n, p_n)_\rho$  e  $\alpha_{-1} = 0$ . Allora

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*Dimostrazione.* Siccome  $xp_n(x)$  è un polinomio di grado  $n+1$ , è una combinazione lineare di  $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$ . Purtroppo

$$(xp_n, p_j)_\rho = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x) \rho(x) dx = 0, \quad j < n-1,$$

poichè  $xp_j(x)$  con  $j < n-1$  è un polinomio di grado  $< n$ . Quindi  $xp_n(x)$  è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali:  $p_{n-1}, p_n, p_{n+1}$ . Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per  $n=0$ . Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1})_\rho \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1})_\rho = (xp_{n-1}, p_n)_\rho = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n)_\rho \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato la tesi.  $\square$

## 2 Esempi

Discutiamo alcuni esempi notevoli.

1.  $I = (-1, 1)$ ,  $\rho(x) \equiv 1$ . In tal caso i polinomi ortogonali sono proporzionali ai polinomi di Legendre  $P_n(x)$ . Infatti, la normalizzazione  $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2/(2n+1)$  implica

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

dove  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  e  $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$ .

---

<sup>2</sup>Si osservi che  $m_j + n_j$  è pari.

2.  $I = (-1, 1)$ ,  $\rho(x) = (1 - x^2)^m$  dove  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Le funzioni associate di Legendre  $P_l^m(x)$  hanno la forma [Vladimirov, p. 333]

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^m(x),$$

dove  $l = m, m + 1, m + 2, \dots$  e  $\mathcal{P}_l^m(x)$  è un polinomio di grado  $l - m$  tale che  $P_l^0(x) = \mathcal{P}_l^0(x) = P_l(x)$  è il polinomio di Legendre di grado  $l$ . Le funzioni associate di Legendre soddisfano la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{l, l'}.$$

Quindi i polinomi ortogonali sono

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n + 2m + 1}{2} \frac{n!}{(n + 2m)!}} \mathcal{P}_{n+m}^m(x).$$

3. Applicando il binomio di Newton alla formula di De Moivre  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ , separando la parte reale da quella immaginaria e utilizzando  $(i)^{2k} = (-1)^k$ , si trovano le rappresentazioni

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j} \\ &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j)/2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(nx) &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j-1} \\ &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j-1)/2}, \end{aligned}$$

sostituendo  $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$  per trovare il terzo membro delle due uguaglianze. Queste equazioni mostrano che  $\cos(nx)$  e  $\sin((n+1)x)/\sin x$  sono polinomi di  $\cos x$  di grado  $n$  con coefficiente principale positivo. Definiamo il polinomio di Chebyshev di prima specie

$$T_n(t) = \cos(nx), \quad t = \cos x \in [-1, 1],$$

ed il polinomio di Chebyshev di seconda specie

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}, \quad t = \cos x.$$

Questi polinomi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$2tT_n(t) = \frac{1}{2}(T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)), \quad T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_2(t) = 2t^2 - 1;$$

$$2tU_n(t) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)), \quad U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t.$$

Queste relazioni seguono facilmente dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche. Finalmente proviamo le relazioni di ortogonalità. Si ha (sostituendo  $t = \cos x$ )

$$\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{n,0})\delta_{n,m};$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi \sin((n+1)x) \sin((m+1)x) dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.$$

In altre parole, i polinomi ortogonali per  $I = (-1, 1)$  e  $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$  sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n,0}}{\pi}} T_n(t).$$

I polinomi ortogonali per  $I = (-1, 1)$  e  $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$  sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(t).$$

4.  $I = (-1, 1)$ ,  $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , dove  $\alpha, \beta > -1$ . In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .
5.  $I = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x) = e^{-x^2}$ . In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Hermite  $H_n(x)$ .
6.  $I = (0, +\infty)$ ,  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ , dove  $\alpha > -1$ . In tal caso i polinomi ortogonali sono i polinomi di Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ .

I polinomi di Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  contengono come casi particolari quelli di Legendre ( $\alpha = \beta = 0$ ), di Legendre associato ( $\alpha = \beta = m$  dove  $m = 0, 1, 2, \dots$ ), di Chebyshev di prima specie ( $\alpha = \beta = -1/2$ ) e di Chebyshev di seconda specie ( $\alpha = \beta = 1/2$ ). I polinomi di Jacobi, Hermite e Laguerre si chiamano anche i polinomi ortogonali classici. Queste classi di polinomi hanno le seguenti proprietà:

1. I polinomi di una certa classe (con  $\alpha, \beta$  fissate) soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini, come tutti i polinomi ortogonali con peso fissato. I polinomi di Jacobi (con  $\alpha = \beta > -1$ ) e di Hermite soddisfano  $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$ , poichè l'intervallo  $I$  è simmetrico rispetto allo zero e  $\rho(x)$  è una funzione pari; quindi  $c_n = (xp_n, p_n)_\rho = 0$  nelle loro relazioni di ricorrenza.

2. I polinomi di una certa classe ammettono una funzione generatrici facile:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta}, \quad R = \sqrt{1-2xt+t^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)}.$$

3. I polinomi di una certa classe soddisfano una formula di Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}];$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}; \quad L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

4. I polinomi di una certa classe (con  $\alpha, \beta$  fissate) sono gli autovettori di un opportuno operatore di Sturm-Liouville e quindi soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine. Esempi:

$$(1-x^2)u'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]u' + n(n + \alpha + \beta + 1)u = 0, \quad u(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x);$$

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad u(x) = H_n(x);$$

$$xu'' + (\alpha + 1 - x)u' + nu = 0, \quad u(x) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Osserviamo che queste tre equazioni differenziali si possono riscrivere nella forma

$$L_{\text{Jacobi}}^{(\alpha,\beta)} u = -((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}u')' = n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta u;$$

$$L_{\text{Hermite}} u = -(e^{-x^2}u')' = 2n e^{-x^2} u;$$

$$L_{\text{Laguerre}}^{(\alpha)} u = -(x^{\alpha+1}e^{-x}u')' = n x^\alpha e^{-x} u.$$

Grazie alle analogie tra loro, i polinomi ortogonali classici vengono spesso studiati insieme.

### 3 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre  $P_l(\xi)$  si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h + h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi) h^l,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x), \quad -1 < x < +1; \quad P_l(1) = 1,$$

3. tramite l'ortogonalità:  $P_l(\xi)$  sono i polinomi in  $\xi$  di grado  $l$  con coefficiente principale positivo tali che

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi)P_{l'}(\xi) = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{d\xi} \right)^l (\xi^2 - 1)^l,$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4  $\Rightarrow$  2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (3.1)$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di  $u(x)$  per  $x \rightarrow \pm 1$  esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per  $\lambda = l(l+1)$  dove  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

soddisfano la (3.1) per  $\lambda = l(l+1)$ . Questi polinomi (di grado  $l$ ) sono detti *polinomi di Legendre* e la (3.2) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo  $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$  e derivando l'identità

$$(x^2 - 1)W_l'(x) - 2lxW_l(x) = 0$$

$l+1$  volte, si ottiene

$$(x^2 - 1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione  $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$  soddisfa l'equazione (3.1). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^s (x-1)^l \right) \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^{l-s} (x+1)^l \right) \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \left( \frac{l!}{(l-s)!} (x-1)^{l-s} \right) \left( \frac{l!}{s!} (x+1)^s \right), \end{aligned}$$

il quale implica che  $P_l(1) = 1$  e  $P_l(-1) = (-1)^l$ .

2  $\Rightarrow$  4. Sostituendo  $u(x) = P_l(x)z(x)$  e  $w(x) = u'(x)$  nella (3.1) con  $\lambda = l(l+1)$ , otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2\frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espressione è divergente in  $x = \pm 1$  (poichè  $P_l(\pm 1)^1 = 1$ ). Quindi  $P_l(x)$  è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (3.1) con  $\lambda = l(l+1)$  che soddisfa  $P_l(1) = 1$ . Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene la formula di Rodrigues dalla proprietà 2.

(2+4)  $\Rightarrow$  3. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio  $L_2(-1, 1)$ . Infatti, utilizzando la (3.1) si ha

$$\begin{aligned} & [l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ P_l(k) [(1-x^2)P_k']' - P_k(x) [(1-x^2)P_l']' \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[ P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi  $(P_l, P_k) = \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx = 0$  se  $l \neq k$ . Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo  $(P_l, P_l)$  tramite  $l$  integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned} (P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \left( \frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2-1)^l \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+1} \cdot l!}{(2l+1)(2l-1)\dots 1} = \frac{2}{2l+1}, \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di ricorrenza  $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$ ,  $I_0 = 2$ , per  $I_l = \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx$ . Quindi  $\sqrt{l + \frac{1}{2}} P_l(x)$  ha norma 1 in  $L_2(-1, 1)$ .

(3+4)  $\Rightarrow$  5. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare  $(P_{l+1}, xP_l)$ . Infatti, dopo  $l+1$  integrazioni



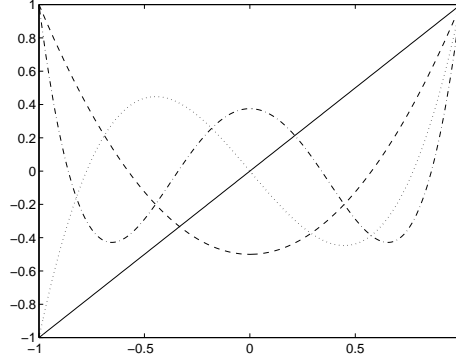


Figura 3.1: I polinomi di Legendre di ordine 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

per parti consecutive e utilizzando  $(xf)^{(l+1)} = xf^{(l+1)} + (l+1)f^{(l)}$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 (P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot ((l+1)!(l!))} \cdot \\
 &\cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left[ x \left( \frac{d}{dx} \right)^{2l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1) \left( \frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \right] dx \\
 &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\
 &= \frac{1}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{l+1} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\
 &= \frac{(2l)!}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+2} \cdot (l+1)!}{(2l+3)(2l+1) \cdots 3 \cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.
 \end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove  $a_j = 0$  per  $j > l+1$  [poichè  $xP_l(x)$  ha grado  $l+1$ ]. Risultano  $(2l+1)(xP_l, P_j) = (2l+1)(P_l, xP_j) = 0$  per  $l < j-1$  [poichè  $xP_j(x)$  ha grado  $< l$ ] e  $(2l+1)(xP_l, P_l) = 0$  [poichè  $xP_l(x)^2$  è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}
 (2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\
 (2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).
 \end{aligned}$$

Quindi  $a_{l+1} = l + 1$  e  $a_{l-1} = l$ . Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (3.3)$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x);$$

$$-1 \leq P_l(x) \leq +1, \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (3.4)$$

5  $\Rightarrow$  1. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}}, \quad |h| < 1. \quad (3.5)$$

Infatti, scriviamo  $F(x, h)$  per la parte a sinistra della (3.5). Per  $|h| < 1$  è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad  $h$ , grazie alla (3.4). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)xP_l(x)h^l &= xF(x, h) + 2xh \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = xF(x, h) + 2xh \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=0}^{\infty} (l + 1)P_{l+1}(x)h^l &= \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}(x)h^l &= h^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l - 1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1} \\ &= h^2 \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h). \end{aligned}$$

Applicando la (3.3) si ha

$$xF(x, h) = (1 - 2xh + h^2) \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h),$$

dove  $F(x, 0) = P_0(x) = 1$ . Oppure:

$$\frac{\partial F / \partial h}{F(x, h)} = \frac{x - h}{1 - 2xh + h^2}, \quad F(x, 0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione  $F(x, h)$  data dalla parte a destra della (3.5).

1  $\Rightarrow$  2. Scrivendo  $F(x, h)$  per la parte a destra nella (3.5) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -h \left( \frac{\partial}{\partial h} \right)^2 (hF(x, h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l \right) = - \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) P_l(x) h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo  $x = 1$  nella (3.5) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1) h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando  $P_l(1) = 1$ .