# POLINOMI ORTOGONALI

**1. Definizione e Proprietà Principali.** Sia $I$ un intervallo della retta reale, sia limitato sia non limitato. Sia $\rho(x)$ una funzione non negativa e misurabile su $I$ tale che $\int_I \rho(x)\,dx < +\infty$ e $\rho(x) > 0$ quasi ovunque. Sia $L_2(I;\rho(x)dx)$ lo spazio di Hilbert di tutte le funzioni misurabili (identificando le funzioni uguali quasi ovunque) $f : I \to \mathbf{C}$ tali che $\int_I |f|^2\rho\,dx < +\infty$, con prodotto scalare

$$(f,g)_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx.$$

Inoltre supponiamo che tutti gli integrali $\int_I |x|^n\rho(x)\,dx < +\infty$ $(n = 0,1,2,\cdots)$.[1] Quest'ipotesi implica che tutti i polinomi appartengono ad $L_2(I;\rho(x)\,dx)$.

È possibile dimostrare che l'insieme dei polinomi è denso in $L^2(I;\rho(x)dx)$. Partendo dalla successione $\{1,x,x^2,x^3,\cdots\}$ di funzioni linearmente indipendenti, possiamo applicare il processo di Gram-Schmidt, cioè lo schema ricorrente

$$p_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|_\rho}, \qquad p_{n+1} = \frac{e_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}(e_{n+1},p_j)_\rho\,p_j}{\|e_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}(e_{n+1},p_j)_\rho\,p_j\|_\rho},$$

dove $e_j(x) = x^j$ per $j \ge 0$, per costruire una successione $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ con le seguenti proprietà:

1. Il grado del polinomio $p_n(x)$ è uguale ad $n$.
2. Il coefficiente principale di $p_n(x)$ (cioè, quello di $x^n$) è positivo.
3. I polinomi sono ortonormali, cioè

$$(p_n,p_m)_\rho = \int_I p_n(x)\overline{p_m(x)}\rho(x)\,dx = \delta_{n,m}.$$

   Siccome l'insieme dei polinomi è denso in $L_2(I;\rho(x)dx)$, risulta una base ortonormale dello spazio di Hilbert $L_2(I;\rho(x)dx)$.
4. I polinomi $p_n(x)$ sono reali.

Esiste un'unica successione di polinomi $p_n$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ con le proprietà (1)-(4). Questi polinomi si chiamano i *polinomi ortogonali* rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_\rho$ (oppure rispetto al "peso" $\rho(x)$).

LEMMA 4.1. Si ha $(f,p_n)_\rho = 0$ per ciascun polinomi $f$ di grado $< n$.

Dimostrazione. Sia $f$ un polinomio di grado $< n$. Allora $f$ è una combinazione lineare dei polinomi $p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}$. Siccome $(p_j,p_n)_\rho = 0$ per $j = 0,1,\cdots,n-1$, risulta $(f,p_n)_\rho = 0$. ∎

[1] Se $I$ è limitato, quest'ipotesi vale automaticamente.

TEOREMA 4.2. Gli zeri del polinomio $p_n$ sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo $I$.

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che $p_n$ ha $m$ (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ in $(a, b)$ e $n - m$ zeri in $\mathbf{C} \setminus (a, b)$. Allora $p_n$ ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) q(x),$$

dove $q$ è un polinomio di grado $n - m$ che non cambia segno in $(a, b)$; dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. Consideriamo il polinomio $f$ definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma 4.1 risulta $(f, p_n)_\rho = 0$. In particolare,

$$0 = (f, p_n)_\rho = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x)\, dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di $p_n$ appartengono ad $(a, b)$.

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di $p_n$, rappresentiamo $p_n$ come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove $\beta_1, \cdots, \beta_r$ sono gli zeri distinti di $p_n$ e $m_1 + \cdots + m_r = n$. Bisogna dimostrare che $r = n$, $m_1 = \cdots = m_n = 1$ e $c > 0$. Se esiste un indice $j$ con $m_j > 1$, definiamo $n_j = 0$ se $m_j$ è pari e $n_j = 1$ se $m_j$ è dispari (cioè, se $m_j = 3, 5, 7, \cdots$). Poi consideriamo il polinomio $g$ definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di $g$ è strettamente minore di $n$, si ha $(g, p_n)_\rho = 0$. In altre parole

$$0 = c \int_I (x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r},$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa.[2] Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annula quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude che tutti gli $n$ zeri di $p_n$ sono semplici. ∎

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini. Se si conoscono i coeffienti in tale relazione, risulta un metodo veloce (in particolare, dal punto di visto numerico) per calcolarli.

---

[2] Si osservi che $m_j + n_j$ è pari.

TEOREMA 4.3. Sia $\alpha_n = (p_{n+1}, p_n)_\rho$, $c_n = (xp_n, p_n)_\rho$ e $\alpha_{-1} = 0$. Allora

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Dimostrazione. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n+1$, è una combinazione lineare di $p_0, p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n, p_j)_\rho = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x)\rho(x)\,dx = 0, \qquad j < n - 1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n-1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: $p_{n-1}, p_n, p_{n+1}$. Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1})_\rho \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1})_\rho = (xp_{n-1}, p_n)_\rho = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n)_\rho . \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato la tesi. ∎

**2. Esempi**. Discutiamo alcuni esempi notevoli.

1. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) \equiv 1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono proportionali ai polinomi di Legendre $P_n(x)$. Infatti, la normalizzazione $\int_{-1}^1 P_n(x)^2\,dx = 2/(2n+1)$ implica

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x),$$

dove $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$.
2. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) = (1 - x^2)^m$ dove $m = 0, 1, 2, \cdots$. Le funzioni associate di Legendre $P_l^m(x)$ hanno la forma [Vladimirov, p. 333]

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2}\mathcal{P}_l^m(x),$$

dove $l = m, m+1, m+2, \cdots$ e $\mathcal{P}_l^m(x)$ è un polinomio di grado $l - m$ tale che $P_l^0(x) = \mathcal{P}_\updownarrow^0(x) = P_l(x)$ è il polinomio di Legendre di grado $l$. Le funzioni associate di Legendre soddisfano la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Quindi i polinomi ortogonali sono

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+2m+1}{2}\,\frac{n!}{(n+2m)!}}\,\mathcal{P}^m_{n+m}(x).$$

3. Applicando il binomio di Newton alla formula di De Moivre $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$, separando la parte reale da quella immaginaria e utillizando $(i)^{2k} = (-1)^k$, si trovano le rappresentazioni

$$\cos(nx) = \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j}$$

$$= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j)/2};$$

$$\sin(nx) = \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j-1}$$

$$= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j-1)/2},$$

sostituendo $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ per trovare il terzo membro delle due uguaglianze. Queste equazioni mostrano che $\cos(nx)$ e $\sin((n+1)x)/\sin x$ sono polinomi di $\cos x$ di grado $n$ con coefficiente principale positivo. Definiamo il polinomio di Chebyshev di prima specie

$$T_n(t) = \cos(nx), \qquad t = \cos x \in [-1,1],$$

ed il polinomio di Chebyshev di seconda specie

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}, \qquad t = \cos x.$$

Questi polinomi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$2tT_n(t) = \frac{1}{2}\left(T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)\right), \qquad T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = 1, \qquad T_2(t) = 2t^2 - 1;$$

$$2tU_n(t) = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)\right), \qquad U_0(t) = 1, \qquad U_1(t) = 2t.$$

Queste relazioni seguono facilmente dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche. Finalmente proviamo le relazioni di ortogonalità. Si ha (sostituendo $t = \cos x$)

$$\int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m};$$

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\pi} \sin((n+1)x)\sin((m+1)x) = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.$$

In altre parole, i polinomi ortogonali per $I = (-1,1)$ e $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n,0}}{\pi}}\,T_n(t).$$

I polinomi ortogonali per $I = (-1,1)$ e $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_n(t).$$

4. $I = (-1,1)$, $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, dove $\alpha, \beta > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.
5. $I = \mathbf{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Hermite $H_n(x)$.
6. $I = (0,+\infty)$, $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, dove $\alpha > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono i polinomi di Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

I polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ contengono come casi particolari quelli di Legendre ($\alpha = \beta = 0$), di Legendre associato ($\alpha = \beta = m$ dove $m = 0,1,2,\cdots$), di Chebyshev di prima specie ($\alpha = \beta = -1/2$) e di Chebyshev di seconda specie ($\alpha = \beta = 1/2$). I polinomi di Jacobi, Hermite e Laguerre si chiamano anche i polinomi ortogonali classici. Queste classi di polinomi hanno le seguenti proprietà:

1. I polinomi di una certa classe (con $\alpha, \beta$ fissate) soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini, come tutti i polinomi ortogonali con peso fissato. I polinomi di Jacobi (con $\alpha = \beta > -1$) e di Hermite soddisfano $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$, poichè l'intervallo $I$ è simmetrico rispetto allo zero e $\rho(x)$ è una funzione pari; quindi $c_n = (xp_n, p_n)_{\rho} = 0$ nelle loro relazioni di ricorrenza.
2. I polinomi di una certa classe ammettono una funzione generatrici facile:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta},\ R = \sqrt{1-2xt+t^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n = e^{2xt-t^2}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = (1-t)^{-\alpha-1}e^{-xt/(1-t)}.$$

3. I polinomi di una certa classe soddisfano una formula di Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\,n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}];$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}; \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}e^{x}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+\alpha}e^{-x}).$$

4. I polinomi di una certa classe (con $\alpha, \beta$ fissate) sono gli autovalore di un opportuno operatore di Sturm-Liouville e quindi soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine. Esempi:

$$(1-x^2)u'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]u' + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0, \qquad u(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x);$$

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \qquad u(x) = H_n(x);$$

$$xu'' + (\alpha+1-x)u' + nu = 0, \qquad u(x) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Osserviamo che queste tre equazioni differenziali si possono riscrivere nella forma

$$L_{\text{Jacobi}}^{(\alpha,\beta)}\, u = -\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}u'\right)' = n(n+\alpha+\beta+1)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}u;$$

$$L_{\text{Hermite}}\, u = -\left(e^{-x^2}u'\right)' = 2n\, e^{-x^2}u;$$

$$L_{\text{Laguerre}}^{(\alpha)}\, u = -\left(x^{\alpha+1}e^{-x}u'\right)' = n\, x^{\alpha}e^{-x}u.$$

Grazie alle analoghie tra loro, i polinomi ortogonali classici vengono spesso studiati insieme.

**Bibliografia**.


1. Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.
2. N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.