

VII. PROBLEMI AL CONTORNO E FUNZIONI SPECIALI

0 Introduzione

In questo capitolo vengono studiati i problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, ed in particolare, le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano. La separazione delle variabili in tali equazioni conduce molto spesso a certe equazioni differenziali ordinarie in un intervallo della retta di tipo Sturm-Liouville, in particolare, le equazioni di Bessel e di Legendre. Per questo motivo vengono anche studiate alcune cosiddette funzioni speciali, in particolare, le funzioni di Bessel, le funzioni sferiche ed alcuni polinomi ortogonali come quelli di Legendre e di Hermite.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S è supposta regolare a tratti. Denotiamo con G_1 l'esterno di \overline{G} , $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Nel caso unidimensionale abbiamo $G = (a, b)$ dove $a, b \in \mathbb{R}$.

1 Problemi agli autovalori

a. Impostazione del problema degli autovalori. Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (1.1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (1.2)$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{G}), & q \in C(\overline{G}); & p(x) > 0, & q(x) \in \mathbb{R}, & x \in \overline{G}, \\ \alpha \in C(S), & \beta \in C(S), \\ \alpha(x) \geq 0, & \beta(x) \geq 0, & \alpha(x) + \beta(x) > 0, & x \in S. \end{cases} \quad (1.3)$$

Sia $S_0 = \{x \in S : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, \beta(x) \equiv 0, & \text{quindi } u = 0, x \in S, & \text{[Problema di Dirichlet]} \\ \alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 1, & \text{quindi } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in S, & \text{[Problema di Neumann]}. \end{cases}$$

Il problema (1.1)-(1.2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfi l'equazione (1.1) in G e le condizioni (1.2) sulla frontiera S . Evidentemente, il problema (1.1)-(1.2) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (1.1)-(1.2) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfano le condizioni al contorno (1.2) e la condizione $Lf \in L_2(G)$ costituiscono il dominio \mathcal{M}_L dell'operatore L . Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(G)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(G)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in G) è denso in $L_2(G)$ ed è contenuto in \mathcal{M}_L , \mathcal{M}_L è denso in $L_2(G)$.

In generale, il dominio \mathcal{M}_L di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

b. Formule di Green. Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v \in C^1(\overline{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G v Lu dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_G quv dx. \quad (1.4)$$

Per dimostrare la formula (1.4) prendiamo una regione arbitraria G' con frontiera S' una superficie regolare a tratti tale che $\overline{G'} \subset G$. Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(G')$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v Lu dx &= \int_{G'} v [-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu] dx \\ &= - \int_{G'} \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{G'} quv dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} pv \frac{\partial u}{\partial n'} dS' + \int_{G'} quv dx,$$

dove S' è la frontiera di G' . Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (1.4). In questo caso l'integrale del primo membro della (1.4) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui G' tende a G , poichè gli integrali nelle parte a destra della (1.4) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (v Lu - u Lv) dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (1.5)$$

Per dimostrare la formula (1.5), scambiamo u e v nella (1.4):

$$\int_G u Lv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S pu \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_G qvu dx, \quad (1.6)$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta dalla (1.6). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (1.5).

In particolare, per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (1.4) e (1.5) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_G v \Delta u dx = - \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (1.7)$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (1.8)$$

c. Proprietà dell'operatore L . L operatore L è hermitiano:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (1.9)$$

Infatti, visto che $f, \bar{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L_2(G)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in L_2(G)$. In tal caso la seconda formula di Green (1.5), per $u = f$ e $v = \bar{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_G (\bar{g} Lf - f \overline{Lg}) dx = \int_S p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (1.10)$$

Inoltre, le funzioni f e \bar{g} soddisfano le condizioni al contorno (1.2):

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (1.11)$$

Per l'ipotesi (1.3), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in S$. Perciò per ogni $x \in S$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (1.11) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$ e quindi il suo determinante si annulla, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (1.10) si ottiene l'uguaglianza (1.9), la quale significa che l'operatore L è hermitiano.

Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (1.4) e tenendo conto del fatto che $f \in L_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p |\text{grad } f|^2 dx - \int_S pf \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_G q |f|^2 dx. \quad (1.12)$$

Dalla condizione al contorno (1.2) segue che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta}f, & \beta(x) > 0, x \in S; \\ f = 0, & \beta(x) = 0, x \in S. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (1.12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G (p|\text{grad } f|^2 + q|f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (1.13)$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

In virtù delle ipotesi (1.3) più l'ipotesi che $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, nel secondo membro della (1.13), tutti e tre termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geq \int_G p|\text{grad } f|^2 dx \geq \min_{x \in \overline{G}} p(x) \int_G |\text{grad } f|^2 dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geq p_0 \|\text{grad } f\|_2^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (1.14)$$

dove $p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su \overline{G} , si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (1.14) segue che l'operatore L è positivo se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, e cioè in tal caso

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (1.15)$$

d. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni dell'operatore L . Prima bisogna estendere il dominio dell'operatore hermitiano L . Per quello ci vuole una teoria sugli operatori lineari autoaggiunti non limitati su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ in H . Allora T si dice *chiuso* se per ogni successione $\{x_n\}$ in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$, si ha $x \in D(T)$ e $Tx = y$. Allora T è un operatore chiuso se e solo se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ è un insieme chiuso in $H \oplus H$ (con norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$). Per dimostrarlo, sia T chiuso e sia $\{(x_n, Tx_n)\}$ una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$ per qualche $(x, y) \in H \oplus H$. In tal caso $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ e, in virtù del fatto che T è chiuso, risultano $x \in D(T)$ e $Tx = y$; quindi $(x, y) \in G(T)$. D'altra parte, se $G(T)$ è chiuso in $H \oplus H$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. In tal caso $\{(x_n, Tx_n)\}$ è una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$. Siccome $G(T)$ è chiuso, risulta $(x, y) \in G(T)$, e quindi $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Teorema 1.1 [Teorema del grafico chiuso] *Sia T un operatore lineare chiuso definito su uno spazio di Hilbert H . Allora T è limitato.*

Dimostrazione. Sia T chiuso con $D(T) = H$. Definiamo gli operatori lineari

$$\begin{cases} \Pi : H \rightarrow G(T), & \Pi x = (x, Tx), \\ J : G(T) \rightarrow H, & J((x, Tx)) = Tx. \end{cases}$$

Allora $T = J\Pi$, dove $\|J((x, Tx))\| = \|Tx\| \leq \|((x, Tx))\|$ e $\|\Pi^{-1}((x, Tx))\| = \|x\| \leq \|((x, Tx))\|$. Quindi J e Π^{-1} sono limitati. Siccome $G(T)$ è chiuso, $G(T)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $((x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2)) = ((x_1, x_2) + ((Tx_1, Tx_2)))$. In virtù del teorema dell'operatore inverso [il Teorema I 1.4], l'operatore Π è limitato. Di conseguenza, $T = J\Pi$ è limitato. \square

Ora definiamo gli operatori autoaggiunti. Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H . Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se $(Tx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in H$. Per un operatore hermitiano T , definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}, \\ \text{In tal caso } \exists! z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H , T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa $D(T) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}$. Si vede facilmente che un operatore autoaggiunto è chiuso. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. Prendendo il limite se $n \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza $(Tz, x_n) = (z, Tx_n)$ valida per ogni $z \in D(T)$, risulta $(Tz, x) = (x, y)$ e quindi $|(Tz, x)| \leq \|y\|\|z\|$ per ogni $z \in D(T)$. Di conseguenza, $x \in D(T)$ e $Tx = y$, così dimostrando il fatto che T è chiuso.

Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio \mathcal{M}_L . Allora L è hermitiano su $L_2(G)$ con dominio denso in $L_2(G)$. Sotto opportune condizioni che non specificheremo,¹ esiste un'estensione autoaggiunta unica \bar{L} dell'operatore L . Le autofunzioni del problema al contorno (1.1)-(1.2) si cercano nel dominio $D(\bar{L})$.

Ritorniamo adesso agli autovalori e autofunzioni dell'operatore L . Infatti bisogna discutere gli autovalori e le autofunzioni dell'estensione autoaggiunta \bar{L} . In altre parole, essi dipendono dalle condizioni al contorno (1.2), ma le autofunzioni non potrebbero appartenere al dominio \mathcal{M}_L ma invece al dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} .

Proposizione 1.2 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

- a) *Tutti gli autovalori sono reali. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, gli autovalori sono non negativi.*
- b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*

¹Certamente per $\alpha, \beta \geq 0$ costanti con $\alpha + \beta > 0$ e S regolare.

c) Le autofunzioni possono essere scelte reali.

d) Sia $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Affinchè $\lambda = 0$ è necessario e sufficiente che $q(x) \equiv 0$ ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e l'autofunzione è costante.

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\bar{L})$ tale che $\bar{L}f = \lambda f$ e $f \neq 0$. Allora $(\lambda - \bar{\lambda})\|f\|_2 = (\bar{L}f, f) - (f, \bar{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in S$, dalla (1.13) segue che $(\bar{L}f, f) \geq 0$.

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\bar{L})$ non banali tali che $\bar{L}f = \lambda f$ e $\bar{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\bar{L}f, g) - (f, \bar{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche \bar{f} è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di queste parte è un'autofunzione reale.

Infine, per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = 0$ un autovalore con corrispondente autofunzione f , mentre $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Allora dalla (1.13) segue $p|\text{grad } f|^2 \equiv 0$ e quindi $[p(x) > 0 \text{ sempre}] f$ è costante e $qf \equiv 0$.² Se f fosse non nulla, ne seguirebbe $q(x) = 0$ per ogni $x \in G$ e $f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in S_0$. Quindi $f \equiv 0$ e $q \equiv 0$. \square

2 Problema di Sturm-Liouville

Nel caso unidimensionale ($n = 1$, $G = (0, \ell)$, $S = \{0, \ell\}$) il problema al contorno (1.1)-(1.2) è detto *problema di Sturm-Liouville*. Ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (2.1)$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (2.2)$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$. Assumiamo che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \left\{ \begin{array}{l} u'' \in L_2(0, \ell) \\ h_1u(0) - h_2u'(0) = 0 \\ H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0 \end{array} \right\} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste*.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Inoltre esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville si cercano nel dominio di \bar{L} (e non necessariamente in \mathcal{M}_L).

²Questo ne segue se $f \in \mathcal{M}_L$.

L'espressione (1.13) per l'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) è non negativo per ogni $f \in \mathcal{M}_L$. In particolare, se $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, \ell]$, $\lambda = 0$ non è un autovalore del problema (2.1)-(2.2) e f è la corrispondente autofunzione, si ottiene $f' \equiv 0$,³ e quindi f è costante; affinché la funzione f sia non banale, ci vogliono le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(\ell) = 0$.

a. La Funzione di Green. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (2.3)$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (2.4)$$

dove $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L , la soluzione del problema al contorno (2.3)-(2.4) nella classe \mathcal{M}_L (e anche nella classe $D(\bar{L})$) è unica. Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1v_1(0) - h_2v_1'(0) = 0, \quad H_1v_2(\ell) + H_2v_2'(\ell) = 0. \quad (2.5)$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0, \ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (2.5) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (2.4). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Siccome $(pw)'(x) \equiv 0$, risulta l'identità

$$p(x)w(x) \equiv p(0)w(0), \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.6)$$

Cercheremo la soluzione del problema (2.3)-(2.4) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (2.7)$$

³Tra poco dimostreremo che l'autofunzione $f \in \mathcal{M}_L$ invece di $f \in D(\bar{L})$.

Allora $c'_1(x)$ e $c'_2(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (2.6), si ottiene

$$c'_1(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \quad c'_2(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \quad (2.9)$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (2.4), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y)v_2(y) dy - \frac{v_2(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y) dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1 v'_1(x) + c_2 v'_2(x) - \frac{v'_1(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y)v_2(y) dy \\ &\quad - \frac{v'_2(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y) dy. \end{aligned}$$

Tenendo conto dalle condizioni (2.5), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_1 [h_1 v_2(0) - h_2 v'_2(0)]; \\ 0 &= H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 [H_1 v_2(\ell) + H_2 v'_2(\ell)], \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (2.10)$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ v_2(x)v_1(y), & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases} \quad (2.11)$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (2.3)-(2.4) o dell'operatore L . Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} = -\frac{w(x)}{p(0)w(0)} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, \ell). \quad (2.12)$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L_2(0, \ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(0, \ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad \mathcal{M}_L

per ogni $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$, il dominio \mathcal{M}_L è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G . Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L_2(0, \ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Infatti, $\bar{L} = G^{-1}$.

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è un autovalore del problema (2.3)-(2.4), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (2.3)-(2.4) nella forma equivalente

$$(L - \mu I)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (2.13)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (2.14)$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (2.5) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu)[f - \mu u].$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y) dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.15)$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L [o di $L - \mu I$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio 2.1 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \quad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (2.5), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \quad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1 \ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [h_1 x + h_2][H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [H_1(\ell - x) + H_2][h_1 y + h_2], & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (2.5), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2 \sqrt{\lambda} \cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0, \lambda)v_2'(0, \lambda) - v_1'(0, \lambda)v_2(0, \lambda) \\ &= \sqrt{\lambda} \left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1) \sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2) \sqrt{\lambda} \cos(\ell\sqrt{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, & u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad [\text{Dirichlet}] \\ n = 0, 1, 2, \dots, & u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad [\text{Neumann}] \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione trascendente⁴

$$\cotg(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n} \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

b. Riduzione del problema di Sturm-Liouville ad un'equazione integrale. Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema 2.1 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in D(\bar{L}), \quad f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell), \quad (2.16)$$

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L_2(0, \ell), \quad (2.17)$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L . Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (2.16) e (2.17) appartengono ad \mathcal{M}_L .

⁴Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\text{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (2.16), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (2.17).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L_2(0, \ell)$ soddisfi l'equazione integrale (2.17). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$ e $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0, \ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0, \ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0, \ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0, \ell]$. Inoltre, dalla (2.5) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (2.2). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. \square

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\bar{L})$) appartiene ad \mathcal{M}_L . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0, \ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (2.18)$$

in $C[0, \ell]$ oppure in $L_2(0, \ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L .

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (2.19)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (2.20)$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (2.1)-(2.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y)u(y) dy, \quad (2.21)$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1 .

c. Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni. Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (2.21) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x, y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (2.1)-(2.2) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare, *l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a $C^2[0, \ell]$.*

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

- 1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo $[q_{\min}, \infty)$ dove $q_{\min} = \min_{x \in [0, \ell]} q(x)$.*

Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min} \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u , allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda \|u\|_2^2 = (Lu, u) \geq q_{\min} \|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

- 2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenerare:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + 1}, \quad (2.22)$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulta la seguente contraddizione con la (2.12):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in (0, \ell).$$

- 3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u soddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (2.5) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce uno sottospazio di $L_2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 non può avere una dimensione maggiore di 1.

Le condizioni al contorno (2.2) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]_0^\ell.$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (2.2). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)} u(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u(\ell), \quad \sqrt{p(0)} u'(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u'(\ell),$$

per la u e per la v , dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio \mathcal{M}_L ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 1, \quad u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = -u(\ell), \quad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell}\right)^2, & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L_2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L_2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (2.23)$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Teorema 2.2 *Ogni funzione $f \in \mathcal{M}_L$ può essere sviluppata in una serie (2.23) uniformemente convergente in $x \in [0, \ell]$.*

Dimostrazione. Il problema di Sturm-Liouville non omogeneo è equivalente all'equazione integrale (2.15), dove il termine noto appartiene all'immagine dell'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$. Quindi il teorema segue dal Teorema di Hilbert-Schmidt. \square

Esempio 2.2 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, \\ \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}, & \varphi_n^c(x) = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \quad \varphi_n^s(x) = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Per $f \in L_2(0, \ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell} f(x) dx, \\ a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

3 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \quad (3.1)$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (3.1) non soddisfano le condizioni del paragrafo precedente.

a. Definizione e proprietà semplici delle funzioni di Bessel. Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad (3.2)$$

dove $\Gamma(z)$ è l'unica funzione analitica sul semipiano destro che soddisfa $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [Vedi la (A.3) nell'appendice]. Questa funzione può essere rappresentata nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (3.3)$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica su tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)}. \quad (3.4)$$

Infatti, la serie di potenze in (3.4) converge uniformemente su ogni compatto del piano complesso, poichè il suo raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ su tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (3.1). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned} & x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu) \Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x), \end{aligned}$$

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine ν* , dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare,

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (3.2) in virtù del fatto che

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \quad (3.6)$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (3.7)$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. L'uguaglianza (3.7) segue dal fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \dots$ [Vedi l'appendice] e quindi la sommatoria nella serie (3.2) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$.

Il Wronskiano $W[u, v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$w'[u, v](x) + \frac{1}{x} W[u, v](x) = 0,$$

e quindi $W[u, v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \rightarrow 0$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_{-\nu}(x) = \frac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + O(x) \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la (A.6). Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta [senza dimostrazione] $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

b. Funzioni di Bessel di seconda specie. Per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ci dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovare una soluzione linearmente indipendente da $J_\nu(x)$ per $\nu \in \mathbb{Z}$, definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la

funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[2 \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] = \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)],
\end{aligned}$$

dove $x \in [0, +\infty)$ e la prima sommatoria sparisce per $n = 0$. Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & x \rightarrow 0, n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & x \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.8)$$

implicando che $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0$.

c. Proprietà di ortogonalità. Dimostriamo il seguente.

Proposizione 3.1 Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (3.9)$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (3.1), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) &= 0, \\
\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) &= 0.
\end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si

ottiene

$$\begin{aligned}
& x [\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)]_{x=0}^1 \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] \right\} dx \\
&= (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Dalla (3.2) [Vedi anche la (3.6)] abbiamo per $x \rightarrow 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (3.11) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \tag{3.12}$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (3.9) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (3.12) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (3.12)).

Per dimostrare la (3.10) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ nella (3.12) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2 dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\
&= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \\
&= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (3.10). □

d. Relazioni di ricorrenza. Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{3.13}$$

Infatti, la prima formula (3.13) segue dalla (3.2):

$$\begin{aligned} & J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k + \nu)}{2\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

In modo analogo si stabilisce la seconda formula (3.13).

Le formule (3.13) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In particolare, per $\nu = 0$ si trova

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Infine, sottraendo le formule (3.13), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel di prima specie. In particolare

$$\begin{aligned} Y'_\nu(x) &= Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x); \\ \frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] &= x^\nu Y_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x); \\ Y'_0(x) &= -Y_1(x); \\ Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

e. Zeri delle funzioni di Bessel. Dimostriamo le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (3.9) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema 3.2 *Gli zeri dell'equazione (3.9) per $\nu > -1$ sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello 0; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (3.2), in virtù del fatto che α , β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\bar{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (3.9), $\bar{\mu}$ è anche'esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (3.10) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (3.2) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$ [Vedi la (A.1)], si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i\beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu} [\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu)]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (3.9) di molteplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J''_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

in virtù dell'equazione (3.1). Dalla (3.14) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (3.1), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (3.1). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (3.14) si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1\right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (3.10), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_0 x)^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(\mu_0)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_0^2}\right) J_\nu(\mu_0)^2 \right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. \square

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (3.9), disponendole in ordine crescente:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \dots$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Scriviamo senza dimostrazione l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi, \quad k \rightarrow +\infty.$$

f. Problema agli autovalori per l'equazione di Bessel. Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (3.16)$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (3.17)$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia \mathcal{M}_{L_ν} l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0, 1])$ che soddisfano le condizioni al contorno (3.17) e la condizione $x^{-1/2}L_\nu u \in L_2(0, 1)$. Quest'insieme è denso in $L_2(0, 1)$. Dalla definizione segue che $L_\nu u \in L_2(0, 1)$ e $xu'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$ se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$. Non studiamo il dominio (contenente \mathcal{M}_{L_ν}) su cui la chiusura $\overline{L_\nu}$ dell'operatore L_ν è autoaggiunta.

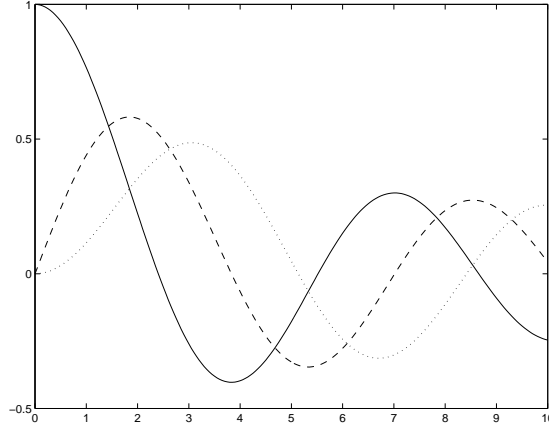


Figura 3.1: Le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2$. I grafici delle $J_0(x)$, $J_1(x)$ e $J_2(x)$ sono le rispettive curve continua, tratteggiata e punteggiata.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L_2(0, 1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned} L_\nu u, u) &= - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx - [xu'\bar{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia un autovalore dell'operatore L_ν , è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplice; questo fatto si dimostra come per gli altri problemi di Sturm-Liouville con condizioni al contorno separate.

Ritorniamo al problema al contorno (3.16)-(3.17), dove $\nu \geq 0$ e tutti gli autovalori λ sono non negativi (con $\lambda = 0$ se e solo se $\nu = \alpha = 0$). Discutiamo prima il caso $\lambda \geq 0$. In tal caso la (3.16) è l'equazione differenziale con soluzione generale $c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Le sue uniche soluzioni che soddisfano la condizione (3.17) per $x \rightarrow 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Questa soluzione soddisfa la condizione (3.17) per $x = 1$ se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (3.9). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

g. Problema al contorno non omogeneo. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L_ν , cioè $\nu > 0$, oppure $\alpha > 0$ per $\nu = 0$. Utilizzando il metodo del paragrafo V.2, costruiamo la funzione di Green $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ dell'operatore L_ν .

Sia $\nu > 0$. In tal caso la (3.16) con $\lambda = 0$ si riduce ad un'equazione di Eulero con le soluzioni linearmente indipendenti x^ν e $x^{-\nu}$. La funzione $v_1(x) = x^\nu$ soddisfa la condizione (3.17) per $x \rightarrow 0^+$ e la funzione

$$v_2(x) = a x^\nu + x^{-\nu}, \quad a = \frac{\beta\nu - \alpha}{\beta\nu + \alpha},$$

soddisfa la condizione (3.17) per $x = 1$. Quindi, conformemente alla formula (2.11), la funzione $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ ha la forma

$$\mathcal{G}_\nu(x, y) = \begin{cases} c_\nu x^\nu (a y^\nu + y^{-\nu}), & 0 \leq x < y \leq 1 \\ c_\nu y^\nu (a x^\nu + x^{-\nu}), & 0 \leq y < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.18)$$

dove $c_\nu \neq 0$ è un'opportuna costante.

Siano $\nu = 0$ ed $\alpha > 0$. In tal caso le funzioni 1 e $\ln(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $L_0 u = 0$. Perciò $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = -(\beta/\alpha) + \ln(x)$ e

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \begin{cases} c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln(y) \right), & 0 \leq x < y \leq 1 \\ c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln(x) \right), & 0 \leq y < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

dove $c_0 \neq 0$ è un'opportuna costante.

La soluzione del problema al contorno

$$L_\nu u = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_{L_\nu}, \quad f \in C((0, 1]), \quad x^{-1/2} f \in L_2(0, 1),$$

è unica ed è espressa mediante la formula

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) f(y) dy. \quad (3.20)$$

h. Completezza del sistema di funzioni di Bessel. In base ai risultati del sottoparagrafo 3.f concludiamo che se $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L_ν , il problema agli autovalori (3.16)-(3.17) è equivalente a quello agli autovalori per l'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) y u(y) dy, \quad u \in C([0, 1]). \quad (3.21)$$

Passando ad una nuova funzione incognita $v(x) = \sqrt{x} u(x)$, riduciamo l'equazione integrale (3.21) alla forma equivalente

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) v(y) dy, \quad v \in C([0, 1]). \quad (3.22)$$

In virtù delle (3.18) e (3.19), il nucleo $\sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) \not\equiv 0$ è reale, continuo e simmetrico. Per questa ragione si può applicare la teoria di Hilbert-Schmidt all'equazione integrale (3.22). In particolare, esistono gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ e le autofunzioni $\sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda_k^{(\nu)}} x)$, $k \in \mathbb{N}$. Come l'abbiamo visto, gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ sono positivi e semplici e quindi le autofunzioni sono ortogonali in $L_2(0, 1)$. Inoltre, grazie alla (3.10), si ha

$$\left\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right\|_x^2 = \frac{1}{2} \left[J'_\nu(\mu_k^{(\nu)}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^{(\nu)}} \right) J_\nu(\mu_k^{(\nu)})^2,$$

dove $\mu_k^{(\nu)} = \sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}$ è lo zero positivo k -esimo della (3.9).

Teorema 3.3 *Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, la funzione $\sqrt{x} u(x)$ può essere sviluppata nella serie uniformemente convergente*

$$\sqrt{x} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \sqrt{x} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x), \quad a_k^{(\nu)} = \frac{\left(u, J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right)_x}{\left\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right\|_x^2}. \quad (3.23)$$

Inoltre, se $\sqrt{x} u(x) \in L_2(0, 1)$, risulta la serie (3.23), dove

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 x \left| u(x) - \sum_{k=1}^N a_k^{(\nu)} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right|^2 dx = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del Teorema 2.2. Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, ne segue che $L_\nu u = f$, dove $f \in C((0, 1])$ e $x^{-1/2} f \in L_2(0, 1)$. Inoltre, vale la formula (3.20), cioè

$$\sqrt{x} u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) \frac{f(y)}{\sqrt{y}} dy.$$

Quindi $\sqrt{x} u(x)$ appartiene all'immagine dell'operatore integrale simmetrico sullo spazio $L_2(0, 1)$ con nucleo $\sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y)$. Per il Teorema II 4.1 (di Hilbert-Schmidt), questa funzione può essere sviluppata in una serie uniformemente convergente rispetto alle autofunzioni $\sqrt{x} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$.

Se, invece, $\lambda = 0$ è un autovalore dell'operatore L_ν (cioè, per $\nu = \alpha = 0$), in questo caso è sufficiente considerare il problema al contorno

$$-(xu')' + xu = (\lambda + 1)xu, \quad u(x) = O(1), \quad x \rightarrow 0^+, \quad u(1) = 0.$$

i. Altre funzioni cilindriche. Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann o le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x).$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie ("modified Bessel functions of the first kind") e le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di McDonald.

Utilizzando l'espressione asintotica (3.15) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (3.24)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (3.25)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (3.26)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (3.27)$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (3.28)$$

Analogamente, utilizzando la (3.6), si ottiene per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (3.1), otteniamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u = 0. \quad (3.29)$$

Dal Teorema 3.2 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

A Appendice: La Funzione Gamma

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{A.1})$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0, 1)$ ed in $(1, +\infty)$. Infatti $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0, 1)$ e $t^\alpha |e^{-t} t^{z-1}| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.2})$$

Quest'identità può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione analitica nell'aperto

$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Negli punti $z = 0, -1, -2, \dots$ la funzione Gamma ha dei poli semplici.

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando la (A.2) si ottiene

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

Dimostriamo ora la formula di duplicazione. Per $\text{Re } z > 0$ si ha

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-1/2} ds dt \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Scambiando α e β e prendendo la media delle due espressioni che risultano, si ottiene l'espressione più simmetrica

$$\begin{aligned} &e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\alpha e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Introducendo le nuove variabili $u = \alpha^2 + \beta^2$ e $v = 2\alpha\beta$, si trova

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty v^{2z-1} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}} du \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-v} v^{2z-1} dv \int_0^\infty e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Dunque risulta la formula di duplicazione

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (\text{A.5})$$

valida per ogni $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$.

Per $0 < \text{Re } z < 1$ si ha

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{-z} t^{z-1} ds dt.$$

Sostituendo $u = s + t$ e $v = t/s$ risulta

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv.$$

L'ultimo integrale si può scrivere in un'altra forma [vedi E.C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London, 1939; p. 105], cioè

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{A.6})$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Riferimenti bibliografici

- [1] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.
- [2] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.
- [3] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
- [4] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Mir Italia-URSS, Mosca, 1987; anche Nauka, Mosca, 1981 [in Russo].
- [5] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.