

V. PROBLEMI AL CONTORNO E FUNZIONI SPECIALI

0. INTRODUZIONE.

In questo capitolo vengono studiati i problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, ed in particolare, le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano. La separazione delle variabili in tali equazioni conduce molto spesso a certe equazioni differenziali ordinarie in un intervallo della retta di tipo Sturm-Liouville, in particolare, le equazioni di Bessel e di Legendre. Per questo motivo vengono anche studiate alcune cosiddette funzioni speciali, in particolare, le funzioni di Bessel, le funzioni sferiche ed alcuni polinomi ortogonali come quelli di Legendre e di Hermite.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S è supposta regolare a tratti. Denotiamo con G_1 l'esterno di \overline{G} , $G_1 = \mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$. Nel caso unidimensionale abbiamo $G = (a, b)$ dove $a, b \in \mathbf{R}$.

1. PROBLEMI AGLI AUTOVALORI

A. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI. Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (1.1)$$

$$\alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (1.2)$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{G}), & q \in C(\overline{G}); & p(x) > 0, & q(x) \in \mathbf{R}, & x \in \overline{G}, \\ \alpha \in C(S), & \beta \in C(S), \\ \alpha(x) \geq 0, & \beta(x) \geq 0, & \alpha(x) + \beta(x) > 0, & x \in S. \end{cases} \quad (1.3)$$

Sia $S_0 = \{x \in S : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, \beta(x) \equiv 0, & \text{quindi } u = 0, x \in S, & \text{[Problema di Dirichlet]} \\ \alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 1, & \text{quindi } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in S, & \text{[Problema di Neumann].} \end{cases}$$

Il problema (1.1)-(1.2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfi l'equazione (1.1) in G e le condizioni (1.2) sulla frontiera S . Evidentemente, il problema (1.1)-(1.2) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (1.1)-(1.2) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfano le condizioni al contorno (1.2) e la condizione $Lf \in L_2(G)$ costituiscono il dominio \mathcal{M}_L dell'operatore L . Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(G)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(G)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in G) è denso in $L_2(G)$ ed è contenuto in \mathcal{M}_L , \mathcal{M}_L è denso in $L_2(G)$.

In generale, il dominio \mathcal{M}_L di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

B. FORMULE DI GREEN. Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v \in C^1(\overline{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G v Lu dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_G quv dx. \quad (1.4)$$

Per dimostrare la formula (1.4) prendiamo una regione arbitraria G' con frontiera S' una superficie regolare a tratti tale che $\overline{G'} \subset G$. Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{G'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v Lu dx &= \int_{G'} v [-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu] dx \\ &= - \int_{G'} \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{G'} quv dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} pv \frac{\partial u}{\partial n'} dS' + \int_{G'} quv dx,$$

dove S' è la frontiera di G' . Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (1.4). In questo caso l'integrale del primo membro della (1.4) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui G' tende a G , poichè gli integrali nelle parte a destra della (1.4) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (v Lu - u Lv) dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (1.5)$$

Per dimostrare la formula (1.5), scambiamo u e v nella (1.4):

$$\int_G u Lv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S pu \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_G quv dx, \quad (1.6)$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta della (1.6). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (1.5).

In particolare, per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (1.4) e (1.5) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_G v \Delta u \, dx = - \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (1.7)$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (1.8)$$

C. PROPRIETÀ DELL'OPERATORE L . L operatore L è hermitiano:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (1.9)$$

Infatti, visto che $f, \bar{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L_2(G)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in L_2(G)$. In tal caso la seconda formula di Green (1.5), per $u = f$ e $v = \bar{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_G (\bar{g} Lf - f \overline{Lg}) \, dx = \int_S p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (1.10)$$

Inoltre, le funzioni f e \bar{g} soddisfano le condizioni al contorno (1.2):

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (1.11)$$

Per l'ipotesi (1.3), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in S$. Perciò per ogni $x \in S$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (1.11) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$ e quindi il suo determinante si annulla, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (1.10) si ottiene l'uguaglianza (1.9), la quale significa che l'operatore L è hermitiano.

Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (1.4) e tenendo conto del fatto che $f \in L_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p |\text{grad } f|^2 \, dx - \int_S p f \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_G q |f|^2 \, dx. \quad (1.12)$$

Dalla condizione al contorno (1.2) segue che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f, & \beta(x) > 0, \, x \in S; \\ f = 0, & \beta(x) = 0, \, x \in S. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (1.12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G (p|\text{grad } f|^2 + q|f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (1.13)$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

In virtù delle ipotesi (1.3) più l'ipotesi che $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, nel secondo membro della (1.13), tutti e tre termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geq \int_G p|\text{grad } f|^2 dx \geq \min_{x \in \overline{G}} p(x) \int_G |\text{grad } f|^2 dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geq p_0 \|\text{grad } f\|_2^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (1.14)$$

dove $p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su \overline{G} , si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (1.14) segue che l'operatore L è positivo se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, e cioè in tal caso

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (1.15)$$

D. PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI DELL'OPERATORE L .
Prima bisogna estendere il dominio dell'operatore hermitiano L . Per quello ci vuole una teoria sugli operatori lineari autoaggiunti non limitati su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ in H . Allora T si dice *chiuso* se per ogni successione $\{x_n\}$ in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$, si ha $x \in D(T)$ e $Tx = y$. Allora T è un operatore chiuso se e solo se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ è un insieme chiuso in $H \oplus H$ (con norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$). Per dimostrarlo, sia T chiuso e sia $\{(x_n, Tx_n)\}$ una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$ per qualche $(x, y) \in H \oplus H$. In tal caso $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ e, in virtù del fatto che T è chiuso, risultano $x \in D(T)$ e $Tx = y$; quindi $(x, y) \in G(T)$. D'altra parte, se $G(T)$ è chiuso in $H \oplus H$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. In tal caso $\{(x_n, Tx_n)\}$ è una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$. Siccome $G(T)$ è chiuso, risulta $(x, y) \in G(T)$, e quindi $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

TEOREMA 1.1 [DEL GRAFICO CHIUSO] *Sia T un operatore lineare chiuso definito su uno spazio di Hilbert H . Allora T è limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia T chiuso con $D(T) = H$. Definiamo gli operatori lineari

$$\begin{cases} \Pi : H \rightarrow G(T), & \Pi x = (x, Tx), \\ J : G(T) \rightarrow H, & J((x, Tx)) = Tx. \end{cases}$$

Allora $T = J\Pi$, dove $\|J((x, Tx))\| = \|Tx\| \leq \|((x, Tx))\|$ e $\|\Pi^{-1}((x, Tx))\| = \|x\| \leq \|((x, Tx))\|$. Quindi J e Π^{-1} sono limitati. Siccome $G(T)$ è chiuso, $G(T)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $((x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2)) = ((x_1, x_2)) + ((Tx_1, Tx_2))$. In virtù del teorema dell'operatore inverso [il Teorema I 1.4], l'operatore Π è limitato. Di conseguenza, $T = J\Pi$ è limitato. ■

Ora definiamo gli operatori autoaggiunti. Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H . Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se $(Tx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in H$. Per un operatore hermitiano T , definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}, \\ \text{In tal caso } \exists! z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H , T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa $D(T) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}$. Si vede facilmente che un operatore autoaggiunto è chiuso. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. Prendendo il limite se $n \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza $(Tx, x_n) = (x, Tx_n)$ valida per ogni $x \in D(T)$, risulta $(Tx, x) = (x, y)$ e quindi $|(Tx, x)| \leq \|y\|\|x\|$ per ogni $x \in D(T)$. Di conseguenza, $x \in D(T)$ e $Tx = y$, così dimostrando il fatto che T è chiuso.

Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio \mathcal{M}_L . Allora L è hermitiano su $L_2(G)$ con dominio denso in $L_2(G)$. Sotto certe condizioni che non specificheremo,¹ esiste un'estensione autoaggiunta unica \bar{L} dell'operatore L . Le autofunzioni del problema al contorno (1.1)-(1.2) si cercano nel dominio $D(\bar{L})$.

Ritorniamo adesso agli autovalori e autofunzioni dell'operatore L . Infatti bisogna discutere gli autovalori e le autofunzioni dell'estensione autoaggiunta \bar{L} . In altre parole, essi dipendono dalle condizioni al contorno (1.2), ma le autofunzioni non potrebbero appartenere al dominio \mathcal{M}_L ma invece al dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} .

PROPOSIZIONE 1.2 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

- a) *Tutti gli autovalori sono reali. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, gli autovalori sono non negativi.*
- b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*
- c) *Le autofunzioni possono essere scelte reali.*
- d) *Sia $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Affinchè $\lambda = 0$ è necessario e sufficiente che $q(x) \equiv 0$ ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e l'autofunzione è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\bar{L})$ tale che $\bar{L}f = \lambda f$ e $f \neq 0$. Allora $(\lambda - \bar{\lambda})\|f\|_2 = (\bar{L}f, f) - (f, \bar{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in S$, dalla (1.13) segue che $(\bar{L}f, f) \geq 0$.

¹ Certamente per $\alpha, \beta \geq 0$ costanti con $\alpha + \beta > 0$ e S regolare.

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\bar{L})$ non banali tali che $\bar{L}f = \lambda f$ e $\bar{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\bar{L}f, g) - (f, \bar{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche \bar{f} è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di queste parte è un'autofunzione reale.

Infine, per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = 0$ un autovalore con corrispondente autofunzione f , mentre $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Allora dalla (1.13) segue $p|\text{grad } f|^2 \equiv 0$ e quindi $[p(x) > 0 \text{ sempre}] f$ è costante e $qf \equiv 0$.² Se f fosse non nulla, ne seguirebbe $q(x) = 0$ per ogni $x \in G$ e $f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in S_0$. Quindi $f \equiv 0$ e $q \equiv 0$. ■

2. PROBLEMA DI STURM-LIOUVILLE

Nel caso unidimensionale ($n = 1$, $G = (0, \ell)$, $S = \{0, \ell\}$) il problema al contorno (1.1)-(1.2) è detto *problema di Sturm-Liouville*. Ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (2.1)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \quad (2.2)$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$. Assumiamo che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \begin{cases} u'' \in L_2(0, \ell) \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0 \end{cases} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste*.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Inoltre esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville si cercano nel dominio di \bar{L} (e non necessariamente in \mathcal{M}_L).

L'espressione (1.13) per l'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) è non negativo per ogni $f \in \mathcal{M}_L$. In particolare, se $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, \ell]$, $\lambda = 0$ non è un autovalore del problema (2.1)-(2.2) e f è la corrispondente autofunzione, si ottiene

² Questo ne segue se $f \in \mathcal{M}_L$.

$f' \equiv 0$,³ e quindi f è costante; affinché la funzione f sia non banale, ci vogliono le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(\ell) = 0$.

A. LA FUNZIONE DI GREEN. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (2.3)$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (2.2^*)$$

dove $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L , la soluzione del problema al contorno (2.3)-(2.2*) nella classe \mathcal{M}_L (e anche nella classe $D(\bar{L})$) è unica. Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1v_1(0) - h_2v_1'(0) = 0, \quad H_1v_2(\ell) + H_2v_2'(\ell) = 0. \quad (2.4)$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0, \ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbf{R}$ e, di conseguenza, in base alla (2.4) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (2.2*). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Siccome $(pw)'(x) \equiv 0$, risulta l'identità

$$p(x)w(x) \equiv p(0)w(0), \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.5)$$

Cercheremo la soluzione del problema (2.3)-(2.2*) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (2.6)$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (2.5), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \quad c_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \quad (2.8)$$

³ Tra poco dimostreremo che l'autofunzione $f \in \mathcal{M}_L$ invece di $f \in D(\bar{L})$.

Per soddisfare le condizioni al contorno (2.2*), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y)v_2(y) dy - \frac{v_2(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y) dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$u'(x) = c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) - \frac{v_1'(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y)v_2(y) dy - \frac{v_2'(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y) dy.$$

Tenendo conto dalle condizioni (2.4), otteniamo

$$0 = h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_1 [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)];$$

$$0 = H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 [H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell)],$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (2.9)$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 \leq x < y, \\ v_2(x)v_1(y), & y < x \leq \ell. \end{cases} \quad (2.10)$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (2.3)-(2.2*) o dell'operatore L . Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} = -\frac{w(x)}{p(0)w(0)} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, \ell). \quad (2.11)$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L_2(0, \ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(0, \ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad \mathcal{M}_L per ogni $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$, il dominio \mathcal{M}_L è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G . Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L_2(0, \ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L , Infatti, $\bar{L} = G^{-1}$.

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è un autovalore del problema (2.3)-(2.2*), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbf{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (2.3)-(2.2*) nella forma equivalente

$$(L - \mu I)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (2.3a)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (2.2a)$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (2.4) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu) [f - \mu u].$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y) dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.12)$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L [o di $L - \mu I$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \quad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (2.4), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \quad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1 \ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} \begin{cases} [h_1 x + x_2][H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ [H_1(\ell - x) + H_2][h_1 y + h_2], & 0 \leq x < y \leq \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (2.4), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$v_1(x, \lambda) = h_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda});$$

$$v_2(x, \lambda) = H_2 \sqrt{\lambda} \cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}),$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0, \lambda) v_2'(0, \lambda) - v_1'(0, \lambda) v_2(0, \lambda) \\ &= \sqrt{\lambda} \left[(h_2 H_2 \lambda - h_1 H_1) \sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2 H_1 + h_1 H_2) \sqrt{\lambda} \cos(\ell\sqrt{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, & u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad [\text{Dirichlet}] \\ n = 0, 1, 2, \dots, & u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad [\text{Neumann}] \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione trascendente

$$\cotg(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n} \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

B. RIDUZIONE DEL PROBLEMA DI STURM-LIOUVILLE AD UN'EQUAZIONE INTEGRALE. Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

TEOREMA 2.1 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in D(\bar{L}), \quad f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell), \quad (2.13)$$

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L_2(0, \ell), \quad (2.14)$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L . Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (2.13) e (2.14) appartengono ad \mathcal{M}_L .

DIMOSTRAZIONE. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (2.13), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (2.14).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L_2(0, \ell)$ soddisfi l'equazione integrale (2.14). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$ e $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0, \ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0, \ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0, \ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0, \ell]$. Inoltre, dalla (2.4) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (2.2). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. ■

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\bar{L})$) appartiene ad \mathcal{M}_L . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0, \ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (2.15)$$

in $C[0, \ell]$ oppure in $L_2(0, \ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L .

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbf{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (2.16)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (2.17)$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (2.1)-(2.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y)u(y) dy, \quad (2.18)$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1 .

C. PROPRIETÀ DEGLI AUTOVALORI E DELLE AUTOFUNZIONI. Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (2.18) con nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (2.1)-(2.2) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare, *l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a $C^2[0, \ell]$.*

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

- 1) Gli autovalori appartengono all'intervallo $[q_{\min}, +\infty)$ dove $q_{\min} = \min_{x \in [0, \ell]} q(x)$. Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0) |f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell) |f(\ell)|^2 \geq q_{\min} \|f\|_2^2,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u , allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda \|u\|_2^2 = (Lu, u) \geq q_{\min} \|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

- 2) L insieme degli autovalori è infinito numerabile. Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenerare:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + 1}, \quad (2.19)$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulta la seguente contraddizione con la (2.11):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in (0, \ell).$$

- 3) Ogni autovalore è semplice. Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u soddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (2.4) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce uno sottospazio di $L_2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 non può avere una dimensione maggiore di 1.

Le condizioni al contorno (2.2) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]_0^\ell.$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (2.2). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)} u(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u(\ell), \quad \sqrt{p(0)} u'(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u'(\ell),$$

per la u e per la v , dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio \mathcal{M}_L ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 1, \quad u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = -u(\ell), \quad u'(0) = -u'(\ell).$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell}\right)^2, & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L_2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L_2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (2.20)$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

TEOREMA 2.2. *Ogni funzione $f \in \mathcal{M}_L$ può essere sviluppata in una serie (2.20) uniformemente convergente in $x \in [0, \ell]$.*

DIMOSTRAZIONE. Il problema di Sturm-Liouville non omogeneo è equivalente all'equazione integrale (2.12), dove il termine noto appartiene all'immagine dell'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$. Quindi il teorema segue dal Teorema di Hilbert-Schmidt. ■

ESEMPIO 2.2. Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, \\ \varphi_0(x) = 1/\sqrt{\ell}, & \varphi_n^c(x) = (2/\ell)^{1/2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \quad \varphi_n^s(x) = (2/\ell)^{1/2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Per $f \in L_2(0, \ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

3, FUNZIONI DI BESSEL.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0, \quad (3.1)$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (3.1) non soddisfano le condizioni del paragrafo precedente.

A. DEFINIZIONE E PROPRIETÀ SEMPLICI DELLE FUNZIONI DI BESSEL. Consideriamo, per $\nu \in \mathbf{R}$, la funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad (3.2)$$

dove $\Gamma(z)$ è l'unica funzione analitica sul semipiano destro che soddisfa $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [Vedi la (A.3) nell'appendice]. Questa funzione può essere rappresentata nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (3.3)$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica su tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k + \nu} \Gamma(k + \nu + 1) \Gamma(k + 1)}. \quad (3.4)$$

Infatti, la serie di potenze in (3.4) converge uniformemente su ogni compatto del piano complesso, poichè il suo raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ su tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (3.1). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
& x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x),
\end{aligned}$$

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine ν* , dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare,

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (3.2) in virtù del fatto che

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \quad (3.6)$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (3.7)$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. L'uguaglianza (3.7) segue dal fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \dots$ [Vedi l'appendice] e quindi la sommatoria nella serie (3.2) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$.

Notiamo che per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) la seconda soluzione linearmente indipendente $Y_n(x)$ dell'equazione di Bessel (3.1) ha la seguente proprietà se $x \rightarrow 0^+$:

$$Y_n(x) = \begin{cases} c_n x^{-n} [1 + o(1)], & n \geq 1 \\ c_0 \log |x| [1 + o(1)], & n = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Quest'asserzione segue dalla formula Wronskiana

$$Y_n'(x)J_n(x) - Y_n(x)J_n'(x) = \frac{a_n}{x}, \quad a_n \neq 0,$$

da cui

$$\left(\frac{Y_n}{J_n}\right)' = \frac{a_n}{xJ_n(x)^2},$$

in modo che

$$Y_n(x) = J_n(x) \left[b_n - a_n \int_x^{x_n} \frac{d\xi}{\xi J_n(\xi)^2} \right]. \quad (3.9)$$

Noi introdurremo la soluzione $Y_n(x)$ tra poco.

B. PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ. Dimostriamo il seguente.

PROPOSIZIONE 3.1. Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (3.10)$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$. In virtù della (3.1), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned} & x [\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)]_{x=0}^1 \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} - J_\nu(\mu_2 x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] \right\} dx \\ &= (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dalla (3.2) [Vedi anche la (3.6)] abbiamo per $x \rightarrow 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (3.13) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \quad (3.14)$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (3.10) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0, \quad (3.15)$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (3.14) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (3.14)).

Per dimostrare la (3.11) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ nella (3.14) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2 dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (3.11). ■

C. RELAZIONI DI RICORRENZA. Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (3.16)$$

Infatti, la prima formula (3.16) segue dalla (3.2):

$$\begin{aligned} &J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k + \nu)}{2\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

In modo analogo si stabilisce la seconda formula (3.16).

Le formule (3.16) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (3.17)$$

Infine, sottraendo le formule (3.16), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0. \quad (3.20)$$

D. ZERI DELLE FUNZIONI DI BESSEL. Dimostriamo le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (3.10) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

TEOREMA 3.2. *Gli zeri dell'equazione (3.10) per $\nu > -1$ sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello 0; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla (3.2), in virtù del fatto che α , β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\bar{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (3.10), $\bar{\mu}$ è anche esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (3.11) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (3.2) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$ [Vedi la (A.1)], si ha per $0 \neq a \in \mathbf{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i \beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu} [\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu)]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (3.10) di molteplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

in virtù dell'equazione (3.1). Dalla (3.21) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (3.1), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (3.1). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (3.21) si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1 \right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (3.11), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_0 x)^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(\mu_0)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_0^2} \right) J_\nu(\mu_0)^2 \right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. ■

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (3.10), disponendole in ordine crescente:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \dots \quad (3.22)$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Scriviamo senza dimostrazione l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.23)$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

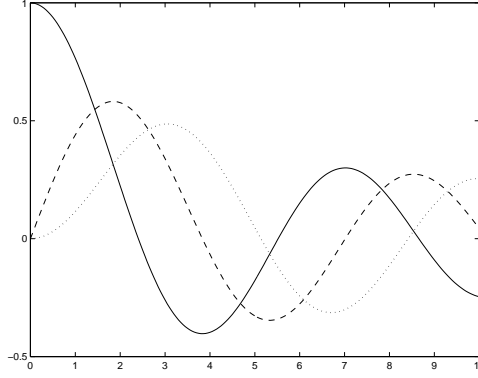
$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi, \quad k \rightarrow +\infty.$$

E. PROBLEMA AGLI AUTOVALORI PER L'EQUAZIONE DI BESSEL. Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (3.24)$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (3.25)$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia \mathcal{M}_{L_ν} l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0, 1])$ che soddisfano le condizioni al contorno (3.25) e la condizione $x^{-1/2}L_\nu u \in L_2(0, 1)$. Quest'insieme è denso in $L_2(0, 1)$. Dalla definizione segue che $L_\nu u \in L_2(0, 1)$ e $xu'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$ se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$. Non studiamo il dominio (contenente \mathcal{M}_{L_ν}) su cui la chiusura $\overline{L_\nu}$ dell'operatore L_ν è autoaggiunta.



Le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2$. I grafici delle $J_0(x)$, $J_1(x)$ e $J_2(x)$ sono le rispettive curve continua, tratteggiata e punteggiata.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L_2(0, 1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned} (L_\nu u, u) &= - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx - [xu'\bar{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia un autovalore dell'operatore L_ν , è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplice; questo fatto si dimostra come per gli altri problemi di Sturm-Liouville con condizioni al contorno separate.

Per dimostrare questi fatti, bisogna discutere la soluzione generale dell'equazione di Bessel (3.1). Siccome la (3.1) non si cambia sotto la trasformazione $\nu \mapsto -\nu$, $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono soluzioni della (3.1). Il loro Wronskiano $W = W(J_\nu, J_{-\nu})$ soddisfa l'equazione differenziale $W'(x) = (1/x)W(x)$; quindi $W(x) = \text{cost.}x$. Per calcolare questa costante, sfruttiamo l'andamento delle funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ per $x \rightarrow 0^+$:

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), & J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), & xJ'_{-\nu}(x) = \frac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque

$$W(J_\nu, J_{-\nu})(x) = \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + O(x) = \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x},$$

dove abbiamo utilizzato la formula $\Gamma(1 + \nu)\Gamma(1 - \nu) = \nu\Gamma(\nu)\Gamma(1 - \nu) = \frac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}$.

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbf{Z}$, risulta [senza dimostrazione] $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per trovare una soluzione linearmente indipendente da $J_\nu(x)$ per ν intero, definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per ν non intero. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbf{C}$ e $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \rightarrow n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[2 \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] = \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)], \end{aligned}$$

dove $x \in [0, +\infty)$ e la prima sommatoria sparisce per $n = 0$. Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & x \rightarrow 0, n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & x \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

implicando che $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0$.

Ritorniamo al problema al contorno (3.24)-(3.25), dove $\nu \geq 0$ e tutti gli autovalori λ sono non negativi (con $\lambda = 0$ se e solo se $\nu = \alpha = 0$). Discutiamo prima il caso $\lambda > 0$. In tal caso la (3.24) è l'equazione differenziale con soluzione generale $c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Le sue uniche soluzioni che soddisfano la condizione (3.25) per $x \rightarrow 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Questa soluzione soddisfa la condizione (3.25) per $x = 1$ se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (3.10). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

F. PROBLEMA AL CONTORNO NON OMOGENEO. Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L_ν , cioè $\nu > 0$, oppure $\alpha > 0$ per $\nu = 0$. Utilizzando il metodo del paragrafo V.2, costruiamo la funzione di Green $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ dell'operatore L_ν .

Sia $\nu > 0$. Il tal caso la (3.24) con $\lambda = 0$ si riduce ad un'equazione di Eulero con le soluzioni linearmente indipendenti x^ν e $x^{-\nu}$. La funzione $v_1(x) = x^\nu$ soddisfa la condizione (3.25) per $x \rightarrow 0^+$ e la funzione

$$v_2(x) = a x^\nu + x^{-\nu}, \quad a = \frac{\beta\nu - \alpha}{\beta\nu + \alpha},$$

soddisfa la condizione (3.25) per $x = 1$. Quindi, conformemente alla formula (2.10), la funzione $\mathcal{G}_\nu(x, y)$ ha la forma

$$\mathcal{G}_\nu(x, y) = \begin{cases} c_\nu x^\nu (a y^\nu + y^{-\nu}), & 0 \leq x < y \leq 1 \\ c_\nu y^\nu (a x^\nu + x^{-\nu}), & 0 \leq y < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.29)$$

dove $c_\nu \neq 0$ è un'opportuna costante.

Siano $\nu = 0$ ed $\alpha > 0$. In tal caso le funzioni 1 e $\ln(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $L_0 u = 0$. Perciò $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = -(\beta/\alpha) + \ln(x)$ e

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \begin{cases} c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln(y) \right), & 0 \leq x < y \leq 1 \\ c_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \ln(x) \right), & 0 \leq y < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.30)$$

dove $c_0 \neq 0$ è un'opportuna costante.

La soluzione del problema al contorno

$$L_\nu u = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_{L_\nu}, \quad f \in C((0, 1]), \quad x^{-1/2} f \in L_2(0, 1), \quad (3.31)$$

è unica ed è espressa mediante la formula

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) f(y) dy. \quad (3.32)$$

G. COMPLETEZZA DEL SISTEMA DI FUNZIONI DI BESSEL. In base ai risultati del sottoparagrafo 3.f concludiamo che se $\lambda = 0$ non è un autovalore dell'operatore L_ν , il problema agli autovalori (3.24)-(3.25) è equivalente a quello agli autovalori per l'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) y u(y) dy, \quad u \in C([0, 1]). \quad (3.33)$$

Passando ad una nuova funzione incognita $v(x) = \sqrt{x} u(x)$, riduciamo l'equazione integrale (3.33) alla forma equivalente

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) v(y) dy, \quad v \in C([0, 1]). \quad (3.34)$$

In virtù delle (3.29) e (3.30), il nucleo $\sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) \not\equiv 0$ è reale, continuo e simmetrico. Per questa ragione si può applicare la teoria di Hilbert-Schmidt all'equazione integrale (3.34). In particolare, esistono gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ e le autofunzioni $\sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda_k^{(\nu)}} x)$, $k \in \mathbf{N}$. Come l'abbiamo visto, gli autovalori $\lambda_k^{(\nu)}$ sono positivi e semplici e quindi le autofunzioni sono ortogonali in $L_2(0, 1)$. Inoltre, grazie alla (3.12), si ha

$$\left\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right\|_x^2 = \frac{1}{2} \left[J'_\nu(\mu_k^{(\nu)}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^{(\nu)}} \right) J_\nu(\mu_k^{(\nu)})^2, \quad (3.35)$$

dove $\mu_k^{(\nu)} = \sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}$ è lo zero positivo k -esimo della (3.10).

TEOREMA 3.3. *Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, la funzione $\sqrt{x} u(x)$ può essere sviluppata nella serie uniformemente convergente*

$$\sqrt{x} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \sqrt{x} J_k(\mu_k^{(\nu)} x), \quad a_k^{(\nu)} = \frac{\left(u, J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right)_x}{\left\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right\|_x^2}. \quad (3.36)$$

Inoltre, se $\sqrt{x} u(x) \in L_2(0, 1)$, risulta la serie (3.36), dove

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 x \left| u(x) - \sum_{k=1}^N a_k^{(\nu)} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right|^2 dx = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del Teorema 2.2. Se $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$, ne segue che $L_\nu u = f$, dove $f \in C((0, 1])$ e $x^{-1/2} f \in L_2(0, 1)$. Inoltre, vale la formula (3.32), cioè

$$\sqrt{x} u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) \frac{f(y)}{\sqrt{y}} dy.$$

Quindi $\sqrt{x} u(x)$ appartiene all'immagine dell'operatore integrale simmetrico su $L_2(0, 1)$ con nucleo $\sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y)$. Secondo il Teorema II 4.1 (quello di Hilbert-Schmidt), questa funzione può essere sviluppata in una serie uniformemente convergente rispetto alle autofunzioni $\sqrt{x} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$.

Se, invece, $\lambda = 0$ è un autovalore dell'operatore L_ν (cioè, per $\nu = \alpha = 0$), in questo caso è sufficiente considerare il problema al contorno

$$-(xu')' + xu = (\lambda + 1)xu, \quad u(x) = O(1), \quad x \rightarrow 0^+, \quad u(1) = 0.$$

H. ALTRE FUNZIONI CILINDRICHE. Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann o le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbf{Z} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x).$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie ("modified Bessel functions of the first kind") e le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di McDonald.

Utilizzando l'espressione asintotica (3.23) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (3.37)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (3.38)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (3.39)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (3.40)$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (3.41)$$

Analogamente, utilizzando la (3.6), si ottiene per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (3.1), otteniamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u = 0.$$

4. POLINOMI DI LEGENDRE ED ALCUNE GENERALIZZAZIONI

A. POLINOMI DI LEGENDRE. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (4.1)$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \rightarrow \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

soddisfano la (4.1) per $\lambda = l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (4.2) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2 - 1)W_l'(x) - 2lxW_l(x)$$

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2 - 1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (4.1).

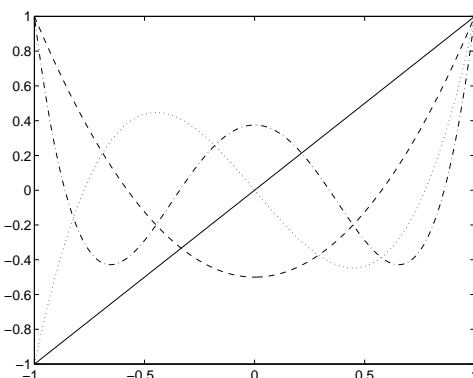
Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali in $L_2(-1, 1)$. Infatti, utilizzando la (4.1) si ha

$$\begin{aligned} & [l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[P_l(k) [(1-x^2)P_k']' - P_k(x) [(1-x^2)P_l']' \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned} (P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = \frac{2}{2l+1}, \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di duplicazione per le funzioni Γ [Vedi la (A.4) nell'appendice]. Quindi $\sqrt{l + \frac{1}{2}} P_l(x)$ ha norma 1 in $L_2(-1, 1)$.



I polinomi di Legendre di ordine 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l) . Infatti, dopo $l + 1$ integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(xf)^{(l+1)} = x f^{(l+1)} + (l + 1) f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned} (P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot ((l+1)!(l!))} \\ &\cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \right] dx \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{1}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+2)}{\Gamma(l+\frac{5}{2})} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}, \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di duplicazione per le funzioni Γ . Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l+1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l+1$]. Risultano $(2l+1)(xP_l, P_j) = (2l+1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j-1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l+1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) = a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3));$$

$$(2l+1)(xP_{l-1}, P_l) = a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).$$

Quindi $a_{l+1} = l+1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (4.3)$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x); \quad (4.4)$$

$$-1 \leq P_l(x) \leq +1, \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (4.5)$$

Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}, \quad |h| < 1. \quad (4.6)$$

Infatti, scriviamo $F(x, h)$ per la parte a sinistra della (4.6). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h , grazie alla (4.5). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)xP_l(x)h^l = xF(x, h) + 2xh \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = xF(x, h) + 2xh \frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)h^l = \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}(x)h^l = h^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1} = h^2 \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h).$$

Applicando la (4.3) si ha

$$xF(x, h) = (1 - 2xh + h^2) \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h),$$

dove $F(x, 0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F/\partial h}{F(x, h)} = \frac{x - h}{1 - 2xh + h^2}, \quad F(x, 0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x, h)$ data dalla parte a destra della (4.6).

5. POLINOMI ORTOGONALI

A. DEFINIZIONE E PROPRIETÀ PRINCIPALI. Sia I un intervallo della retta reale, sia limitato sia non limitato. Sia $\rho(x)$ una funzione non negativa e misurabile su I tale che $\int_I \rho(x) dx < +\infty$ e $\rho(x) > 0$ quasi ovunque. Sia $L_2(I; \rho(x)dx)$ lo spazio di Hilbert di tutte le funzioni misurabili (identificando le funzioni uguali quasi ovunque) $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ tali che $\int_I |f|^2 \rho dx < +\infty$, con prodotto scalare

$$(f, g)_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx.$$

Inoltre supponiamo che tutti gli integrali $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).⁴ Quest'ipotesi implica che tutti i polinomi appartengono ad $L_2(I; \rho(x) dx)$.

Partendo dalla successione $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ di funzioni linearmente indipendenti, possiamo applicare il processo di Gram-Schmidt, cioè lo schema ricorrente

$$p_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|_\rho}, \quad p_{n+1} = \frac{e_{n+1} - \sum_{j=0}^n (e_{n+1}, p_j)_\rho p_j}{\|e_{n+1} - \sum_{j=0}^n (e_{n+1}, p_j)_\rho p_j\|_\rho},$$

dove $e_j(x) = x^j$ per $j \geq 0$, per costruire una successione $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ con le seguenti proprietà:

1. I polinomi $p_n(x)$ sono reali.
2. Il grado del polinomio $p_n(x)$ è uguale ad n .
3. Il coefficiente principale di $p_n(x)$ (cioè, quello di x^n) è positivo.
4. I polinomi sono ortonormali, cioè

$$(p_n, p_m)_\rho = \int_I p_n(x) \overline{p_m(x)} \rho(x) dx = \delta_{n,m}.$$

⁴ Se I è limitato, quest'ipotesi vale automaticamente.

Siccome l'insieme dei polinomi è denso in $L_2(I; \rho(x)dx)$ [Non lo dimostreremo!], risulta una base ortonormale dello spazio di Hilbert $L_2(I; \rho(x)dx)$.

Esiste un'unica successione di polinomi p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) con le proprietà (1)-(4). Questi polinomi si chiamano i *polinomi ortogonali* rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_\rho$ (oppure rispetto al "peso" $\rho(x)$).

LEMMA 5.1. *Si ha $(f, p_n)_\rho = 0$ per ciascun polinomio f di grado $< n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia f un polinomio di grado $< n$. Allora f è una combinazione lineare dei polinomi p_0, p_1, \dots, p_{n-1} . Siccome $(p_j, p_n)_\rho = 0$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$, risulta $(f, p_n)_\rho = 0$. ■

TEOREMA 5.2. *Gli zeri del polinomio p_n sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo I .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che p_n ha m (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in (a, b) e $n - m$ zeri in $\mathbf{C} \setminus (a, b)$. Allora p_n ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)q(x),$$

dove q è un polinomio di grado $n - m$ che non cambia segno in (a, b) ; dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. Consideriamo il polinomio f definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma 5.1 risulta $(f, p_n)_\rho = 0$. In particolare,

$$0 = (f, p_n)_\rho = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di p_n appartengono ad (a, b) .

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di p_n , rappresentiamo p_n come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove β_1, \dots, β_r sono gli zeri distinti di p_n e $m_1 + \dots + m_r = n$. Bisogna dimostrare che $r = n$, $m_1 = \dots = m_n = 1$ e $c > 0$. Se esiste un indice j con $m_j > 1$, definiamo $n_j = 0$ se m_j è pari e $n_j = 1$ se m_j è dispari (cioè, se $m_j = 3, 5, 7, \dots$). Poi consideriamo il polinomio g definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di g è strettamente minore di n , si ha $(g, p_n)_\rho = 0$. In altre parole

$$0 = c \int_I (x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r},$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa.⁵ Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude che tutti gli n zeri di p_n sono semplici. ■

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini. Se si conoscono i coefficienti in tale relazione, risulta un metodo veloce (in particolare, dal punto di vista numerico) per calcolarli.

TEOREMA 5.3. Sia $\alpha_n = (p_{n+1}, p_n)_\rho$, $c_n = (xp_n, p_n)_\rho$ e $\alpha_{-1} = 0$. Allora

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n + 1$, è una combinazione lineare di $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n, p_j)_\rho = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x) \rho(x) dx = 0, \quad j < n - 1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n - 1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: p_{n-1}, p_n, p_{n+1} . Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1})_\rho \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1})_\rho = (xp_{n-1}, p_n)_\rho = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n)_\rho. \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato la tesi. ■

B. ESEMPLI. Discutiamo alcuni esempi notevoli.

1. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) \equiv 1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono proporzionali ai polinomi di Legendre $P_n(x)$. Infatti, la normalizzazione $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2/(2n+1)$ implica

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

dove $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$.

2. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) = (1-x^2)^m$ dove $m = 0, 1, 2, \dots$. Le funzioni associate di Legendre $P_l^m(x)$ hanno la forma [Vladimirov, p. 333]

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^m(x),$$

⁵ Si osservi che $m_j + n_j$ è pari.

dove $l = m, m + 1, m + 2, \dots$ e $\mathcal{P}_l^m(x)$ è un polinomio di grado $l - m$ tale che $P_l^0(x) = \mathcal{P}_l^0(x) = P_l(x)$ è il polinomio di Legendre di grado l . Le funzioni associate di Legendre soddisfano la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}.$$

Quindi i polinomi ortogonali sono

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+2m+1}{2} \frac{n!}{(n+2m)!}} \mathcal{P}_{n+m}^m(x).$$

3. Applicando il binomio di Newton alla formula di De Moivre $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$, separando la parte reale da quella immaginaria e utilizzando $(i)^{2k} = (-1)^k$, si trovano le rappresentazioni

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j} \\ &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j)/2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(nx) &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j-1} \\ &= \sum_{\substack{j=0, \dots, n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j-1)/2}, \end{aligned}$$

sostituendo $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ per trovare il terzo membro delle due uguaglianze. Queste equazioni mostrano che $\cos(nx)$ e $\sin((n+1)x)/\sin x$ sono polinomi di $\cos x$ di grado n con coefficiente principale positivo. Definiamo il polinomio di Chebyshev di prima specie

$$T_n(t) = \cos(nx), \quad t = \cos x \in [-1, 1],$$

ed il polinomio di Chebyshev di seconda specie

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}, \quad t = \cos x.$$

Questi polinomi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$2tT_n(t) = \frac{1}{2} (T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)), \quad T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_2(t) = 2t^2 - 1;$$

$$2tU_n(t) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)), \quad U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t.$$

Queste relazioni seguono facilmente dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche. Finalmente proviamo le relazioni di ortogonalità. Si ha (sostituendo $t = \cos x$)

$$\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{n,0})\delta_{n,m};$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi \sin((n+1)x) \sin((m+1)x) = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.$$

In altre parole, i polinomi ortogonali per $I = (-1, 1)$ e $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n,0}}{\pi}} T_n(t).$$

I polinomi ortogonali per $I = (-1, 1)$ e $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(t).$$

4. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, dove $\alpha, \beta > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.
5. $I = \mathbf{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Hermite $H_n(x)$.
6. $I = (0, +\infty)$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, dove $\alpha > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono i polinomi di Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

I polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ contengono come casi particolari quelli di Legendre ($\alpha = \beta = 0$), di Legendre associato ($\alpha = \beta = m$ dove $m = 0, 1, 2, \dots$), di Chebyshev di prima specie ($\alpha = \beta = -1/2$) e di Chebyshev di seconda specie ($\alpha = \beta = 1/2$). I polinomi di Jacobi, Hermite e Laguerre si chiamano anche i polinomi ortogonali classici. Queste classi di polinomi hanno le seguenti proprietà:

1. I polinomi di una certa classe (con α, β fissate) soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini, come tutti i polinomi ortogonali con peso fissato. I polinomi di Jacobi (con $\alpha = \beta > -1$) e di Hermite soddisfano $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$, poichè l'intervallo I è simmetrico rispetto allo zero e $\rho(x)$ è una funzione pari; quindi $c_n = (xp_n, p_n)_\rho = 0$ nelle loro relazioni di ricorrenza.
2. I polinomi di una certa classe ammettono una funzione generatrici facile:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-t+R)^{-\alpha} (1+t+R)^{-\beta}, \quad R = \sqrt{1-2xt+t^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)}.$$

3. I polinomi di una certa classe soddisfano una formula di Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left(\frac{d}{dx} \right)^n [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}];$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}; \quad L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

4. I polinomi di una certa classe (con α, β fissate) sono gli autovettori di un opportuno operatore di Sturm-Liouville e quindi soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine. Esempi:

$$(1-x^2)u'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]u' + n(n + \alpha + \beta + 1)u = 0, \quad u(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x);$$

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad u(x) = H_n(x);$$

$$xu'' + (\alpha + 1 - x)u' + nu = 0, \quad u(x) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Osserviamo che queste tre equazioni differenziali si possono riscrivere nella forma

$$L_{\text{Jacobi}}^{(\alpha, \beta)} u = -((1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} u')' = n(n + \alpha + \beta + 1) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u;$$

$$L_{\text{Hermite}} u = -\left(e^{-x^2} u' \right)' = 2n e^{-x^2} u;$$

$$L_{\text{Laguerre}}^{(\alpha)} u = -\left(x^{\alpha+1} e^{-x} u' \right)' = n x^\alpha e^{-x} u.$$

Grazie alle analogie tra loro, i polinomi ortogonali classici vengono spesso studiati insieme.

APPENDICE: LA FUNZIONE GAMMA

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{A.1})$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0, 1)$ ed in $(1, +\infty)$. Infatti $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0, 1)$ e $t^\alpha |e^{-t} t^{z-1}| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.2})$$

Quest'identità può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione analitica nell'aperto

$\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Negli punti $z = 0, -1, -2, \dots$ la funzione Gamma ha dei poli semplici.

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Dimostriamo ora la formula di duplicazione. Per $\text{Re } z > 0$ si ha

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-1/2} ds dt \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Scambiando α e β e prendendo la media delle due espressioni che risultano, si ottiene l'espressione più simmetrica

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\alpha e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Introducendo le nuove variabili $u = \alpha^2 + \beta^2$ e $v = 2\alpha\beta$, si trova

$$\begin{aligned} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty v^{2z-1} dv \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}} du \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-v} v^{2z-1} dv \int_0^\infty e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Dunque risulta la formula di duplicazione

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \quad (\text{A.4})$$

valida per ogni $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$.

Bibliografia.

1. Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.
2. N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.
3. I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
4. V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Mir Italia-URSS, Mosca, 1987; anche Nauka, Mosca, 1981 [in Russo].
5. G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.