TRASFORMATA DI FOURIER

1. Trasformata di Fourier negli spazi L_1 e L_2. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$F[f](\xi) = \int f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|F[f](\xi)| \le \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)|\,dx$ è la norma L_1 di f. In tal caso si definisce una funzione $\xi \mapsto F[f](\xi)$ su $\mathbf{R}^n$ che si chiama la *trasformata di Fourier* della f. Dal teorema della convergenza dominata segue che $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbf{R}^n$.

PROPOSIZIONE 1.1. Sia $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbf{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \to +\infty$.[1]

Dimostrazione. La continuità di $F[f](\xi)$ al variare di ξ segue dal teorema della convergenza dominata (infatti, dal Lemma 6.9.1 in Giusti II). La seconda parte segue approssimando $(\mathrm{Re}\, f)^{\pm}$ e $(\mathrm{Im}\, f)^{\pm}$ da una successione crescente di funzioni semplici sommabili e applicando il teorema di Beppo-Levi. ∎

Siano $f,g \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Allora $F[f], F[g] \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$. In tal caso risulta per $f,g \in L_1(\mathbf{R}^n)$

$$(F[f],g) = \int \left[\int f(x)e^{i(x,\xi)}\,dx\right] g(\xi)\,d\xi = \int f(x)\left[\int g(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi\right]dx = (f,F[g]); \tag{1.1a}$$

$$(F[f],g)_c = \int \left[\int f(x)e^{i(x,\xi)}dx\right]\overline{g(\xi)}d\xi = \int f(x)\left[\overline{\int g(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi}\right]dx = (f,F[g](-\xi))_c, \tag{1.1b}$$

dove il secondo passaggio è giustificato grazie al teorema della convergenza dominata. Inoltre, $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L_2(\mathbf{R}^n)$, mentre $(\cdot,\cdot)$ è quello reale.

Siano $f,g \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Allora il teorema di Fubini dimostrare che il prodotto di convoluzione

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

conduce ad una funzione $f*g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Dal teorema di Fubini segue che

$$f*g = g*f, \qquad (f*g)*h = f*(g*h),$$

dove $f,g,h \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x-y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned} F[f*g](\xi) &= \int\left(\int f(y)g(x-y)\,dy\right)e^{i(x,\xi)}\,dx = \int\left(\int f(y)e^{i(y,\xi)}g(z)e^{i(z,\xi)}\,dy\right)dz \\ &= F[f](\xi)F[g](\xi). \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L_1(\mathbf{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbf{R}^n)$ con il prodotto algebraico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L_2(\mathbf{R}^n)$.

TEOREMA 1.2 (di Plancherel). Sia $f \in L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_2(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |F[f](\xi)|^2 \, d\xi = \int |f(x)|^2 \, dx. \tag{1.3}$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbf{R}^n)$ che soddisfa (1.3) per ogni $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$ (vedi Giusti II, Teorema 2.5.2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} F[f](-n)$ e

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F[f](-n)|^2.$$

Siccome $c_n[e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} F[f](-n-t)$ per ogni $n \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |F[f](-n-t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi.$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbf{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[g](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi.$$

Se $f \in L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (1.3) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L_2(\mathbf{R})$ in $L_2(\mathbf{R})$ che soddisfa (1.3). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$

di $L_2(\mathbf{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$ di $L_2(\mathbf{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L_2(\mathbf{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbf{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. ∎

COROLLARIO 1.3. Sia $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L_2(\mathbf{R}^n)$. Allora per $f, g \in L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_2(\mathbf{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \overline{g}) = (f, F[\overline{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Dalla (1.3) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L_2(\mathbf{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (1.4). ∎

2. Funzioni Generalizzate di Crescita Lenta. Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei problemi nella fisica matematica è il metodo delle trasformate di Fourier. Nel prossimo paragrafo sarà esposta la teoria della trasformata di Fourier per le cosidette funzioni generalizzate di crescita lenta (distribuzioni rinvenute). Per questa ragione si deve prima studiare la classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

a. Spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{S}$. Riportiamo nell'insieme delle funzioni fondamentali $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tutte le funzioni della classe $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ decrescenti, per $|x| \to +\infty$, con tutte le derivate più rapidamente di ogni potenza non negativa di $1/|x|$. Definiamo la convergenza in $\mathcal{S}$ come segue: la successione delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, da $\mathcal{S}$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, cioè $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, se, per tutti i valori dei moltiindici[2] α e β, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) - x^\beta D^\alpha \varphi(x) \right| = 0.$$

Le operazioni di derivazione $D^\beta \varphi(x)$ e di sostituzione lineare non singolare di variabili $\varphi(Ay + b)$ (dove $\det A \neq 0$) sono continue da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Questo segue direttamente dalla definizione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

D'altro canto, la moltiplicazione per una funzione infinitamente derivabile può far uscire all'esterno dell'insieme $\mathcal{S}$, per esempio $e^{-|x|^2} e^{|x|^2} = 1 \notin \mathcal{S}$.

[2] Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^n$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^n$, allora $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ e $D^\alpha \varphi(x) = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \varphi(x)$. Secondo il teorema di Schwartz, l'ordine di derivazione parziale non importa. Inoltre, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Supponiamo che una funzione $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ cresca all'infinito insieme con tutte le derivate successive non più rapidamente del polinomio

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m\alpha}. \tag{2.1}$$

Indichiamo con θ_M l'insieme di queste funzioni.

L'operazione di moltiplicazione per una funzione $a \in \theta_M$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Infatti, dalla disuguaglianza (2.1) segue che, se $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha $a\varphi \in \mathcal{S}$, e se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, per tutti i valori di α e β si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{k \in \mathbf{R}^n} x^\beta [D^\alpha(a\varphi_k)](x) = 0,$$

cioè $a\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$.

b. Spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathcal{S}'$. Si dice *funzione generalizzata di crescita lenta* ogni funzionale lineare continuo sullo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni fondamentali. Denotiamo $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni generalizzate di crescita lenta. È evidente che $\mathcal{S}'$ è un insieme lineare. Definiamo come *debole* la convergenza di una successione di funzionali: una successione di funzioni generalizzate $f_1, f_2, \cdots$, appartenenti a $\mathcal{S}'$, converge ad una funzione generalizzata $f \in \mathcal{S}'$, cioè $f_k \to f$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$ se, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ per $k \to \infty$. L'insieme lineare $\mathcal{S}'$ dotato di convergenza è detto spazio $\mathcal{S}'$ delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

TEOREMA 2.1 (di Laurent Schwartz). Affinché un funzionale lineare f su $\mathcal{S}$ appartenga a $\mathcal{S}'$ (cioè, sia continuo su $\mathcal{S}$), è necessario e sufficiente che esistono numeri $C > 0$ e $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tali che, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$, sia valida la disuguaglianza[3]

$$|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_{(p)}, \tag{2.2}$$

dove

$$\|\varphi\|_{(p)} = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la sufficienza, supponiamo che il funzionale lineare f su $\mathcal{S}$ soddisfi la disuguaglianza (2.2) per certi $C > 0$ e $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dimostriamo che $f \in \mathcal{S}'$. Sia $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Si ha allora $\|\varphi_k\|_{(p)} \to 0$ per $k \to \infty$, e quindi $|(f, \varphi_k)| \leq C\|\varphi_k\|_{(p)} \to 0$ per $k \to \infty$. Ciò significa che f è un funzionale continuo su $\mathcal{S}$.

Per dimostrare la necessità, sia $f \in \mathcal{S}'$. Dimostriamo che esistono numeri $C > 0$ e $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tali che, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}'$, è valida la disuguaglianza (2.2). Supponiamo, invece, che i numeri menzionati C e p non esistano. Allora esiste una successione di funzioni φ_k, $k \in \mathbf{N}$, appartenenti a $\mathcal{S}$, tali che

$$|(f, \varphi_k)| \geq l\, \|\varphi_k\|_{(k)}. \tag{2.3}$$

[3] Si ricordi che $\|\varphi\|_p$ denota la norma L_p di una funzione φ.

La successione di funzioni

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{(k)}}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

tende a zero in $\mathcal{S}$, poichè per $k \geq |\alpha|$ e $k \geq |\beta|$ si ha

$$\left|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)\right| = \frac{\left|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)\right|}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{(k)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Da ciò e dalla continuità del funzionale f su $\mathcal{S}$ segue che $(f, \psi_k) \to 0$ per $k \to \infty$. D'altro canto, la disuguaglianza (2.3) dà

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{(k)}} |(f, \varphi_k)| \geq \sqrt{k}.$$

La contraddizione ottenuta dimostra il teorema. ∎

Il significato del teorema dimostrato consiste nel fatto che ogni funzione generalizzata di crescita lenta è un funzionale continuo rispetto ad una certa norma $\|\cdot\|_{(p)}$ (come si è soliti dire, ha un *ordine finito*).

c. Esempi di funzioni generalizzate di crescita lenta.

(a) Se $f(x)$ è una funzione localmente sommabile di crescita lenta all'infinito, cioè per un certo $m \geq 0$,

$$\int |f(x)(1+|x|)^{-m}\, dx < +\infty,$$

questa funzione definisce un funzionale regolare f appartenente a $\mathcal{S}'$ in conformità con la regola

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ma non tutte le funzioni localmente sommabili definiscono una funzione generalizzata di crescita lenta, per esempio, $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

D'altro canto, non tutte le funzioni localmente sommabili appartenenti a $\mathcal{S}'$ sono di crescita lenta. Per esempio, la funzione $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ non è di crescita lenta, eppure definisce una funzione generalizzata da $\mathcal{S}'$ mediante la formula

$$((\cos e^x)', \varphi) = -\int (\cos e^x)\varphi'(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Utilizzando il Teorema 2.1 si può dimostrare (vedi [S66]) che ogni funzione generalizzata appartenente a $\mathcal{S}'$ è una derivata (o derivata successiva) di una funzione continua di crescita lenta.

(b) Se $f \in \mathcal{S}'$, allora ogni derivata $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che l'operazione di derivazione $D^\alpha \varphi$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(c) Se $f \in \mathcal{S}'$ e $\det A \neq 0$, si ha $f(Ay+b) \in \mathcal{S}'$. Infatti, dato che l'operazione di trasformazione $\varphi[A^{-1}(x-b)]$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(d) Se $f \in \mathcal{S}'$ ed $a \in \theta_M$, si ha $af \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che l'operazione di molteplicazione per a appartenente a θ_M è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(e) La derivata $D^\alpha \delta$ della funzione Delta di Dirac appartiene a $\mathcal{S}'$. Infatti, il terzo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}[D^\alpha \varphi](0)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

3. Trasformata di Fourier delle funzioni generalizzate di crescita lenta. La proprietà rimarchevole della classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

a. Trasformazione di Fourier delle funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$. Visto che le funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$ sono sommabili in $\mathbf{R}^n$, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ, è limitata e continua in $\mathbf{R}^n$. La funzione fondamentale φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{3.1}$$

da cui segue che $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\alpha \varphi$ e quindi

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int D^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi). \tag{3.2}$$

Infine, dalle formule (3.1) e (3.2) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi). \tag{3.3}$$

Dall'uguaglianza (3.3) segue che, per tutti gli α e β, i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbf{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi)|\, dx. \tag{3.4}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su $\mathbf{R}^n$, allora, siccome $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{3.5}$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dalle formule (3.5) e (3.6) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$.[4] Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed inoltre in modo univoco.

LEMMA 3.1. L'operazione di trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in $\mathcal{S}$. Allora, applicando la (3.4) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α e β

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\, dx \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|(1+|x|)^{n+1} \int \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}},$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Il lemma è dimostrato. ∎

L'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

[4] Se $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$ e $F[f] = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque. Per mancanza di una descrizione della classe delle trasformate di Fourier delle funzioni in $L_1(\mathbf{R}^n)$, questa proprietà non si dimostra tanto facilmente.

b. Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathcal{S}'$. Assumiamo l'uguaglianza (1.1a) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque funzione generalizzata di crescita lenta f:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathcal{S}', \ \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3.7}$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale (evidentemente, lineare) su $\mathcal{S}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$. In questo caso, in base alla (3.7), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{3.8}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F, cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{3.9}$$

Infatti, dalle (3.5)-(3.8) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
(F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi), F[\varphi]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\
&= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}$ al sesto ed al settimo passaggio.[5] Ora seguono le formule (3.9).

Dalle formule (3.9) deriva che ogni funzione generalizzata f appartenente a $\mathcal{S}'$ è la trasformata di Fourier della funzione generalizzata $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$ in modo biunivoco e continuo.

[5] Si noti che $\mathcal{S} \subseteq L_2(\mathbf{R}^n)$.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbf{R}^n$ ed $y \in \mathbf{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{3.10}$$

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)}\, d\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$, di modo che la formula (3.10) definisce realmente una funzione generalizzata $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}. \tag{3.11}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0)\\ &= \int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x_0)}\, d\xi = (e^{i(\xi, x_0)}, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Ponendo nella (3.11) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{3.12}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{3.13}$$

c. Proprietà della trasformazione di Fourier.

(a) Derivazione della trasformata di Fourier. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \tag{3.14}$$

Infatti, utilizzando la (3.2), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha \varphi])\\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, (-ix)^\alpha F[\varphi]) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (3.14).

In particolare, ponendo nella (3.14) $f = 1$ ed utilizzando la formula (3.13), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \tag{3.15}$$

(b) Trasformata di Fourier di una variabile. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \tag{3.16}$$

Infatti, utilizzando la formula (3.1), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(F[D^\alpha f], \varphi) &= (D^\alpha f, F[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha F[\varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, F[(i\xi)^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], (i\xi)^\alpha \varphi) = ((-i\xi)^\alpha F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (3.16).

(c) Trasformata di Fourier di una traslazione. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{i(x_0, x)} F[f]. \tag{3.18}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(F[f(x - x_0)], \varphi) &= (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0)) \\ &= (f, F[\varphi e^{i(x_0,\xi)}]) = (F[f], e^{i(x_0,\xi)}\varphi) = (e^{i(x_0,\xi)} F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (3.18).

(d) Traslazione della trasformata di Fourier. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \tag{3.19}$$

Infatti, utilizzando la formula (3.18), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}F[f](\xi + \xi_0), \varphi) &= (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) \\ &= (f, e^{i(\xi_0,x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,x)} f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (3.19).

(e) Trasformata di Fourier di similitudine (con riflessione). Se $f \in \mathcal{S}'$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{3.20}$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$\begin{aligned}(F[f(cx)], \varphi) &= (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, \int \varphi(\xi) e^{i(\frac{x}{c},\xi)}\, d\xi\right) \\ &= (f, \int \varphi(c\xi') e^{i(x,\xi')}\, d\xi') = (f, F[\varphi(c\xi)]) = (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi\right).\end{aligned}$$

(f) TRASFORMATA DI FOURIER DEL PRODOTTO DIRETTO. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$, si ha

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)] = F_y[F[f](\xi) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta). \tag{3.21}$$

Infatti, per tutte le $\varphi(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&(F[f(x) \cdot g(y)], \varphi) = (f(x) \cdot g(y), F[\varphi]) = (f(x), (g(y), F_\eta F_\xi[\varphi])) = (f(x), (F[g], F_\xi[\varphi])) \\
&= (f(x) \cdot F[g](\eta), F_\xi[\varphi]) = (F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)], \varphi) = (F[g](\eta), (f(x), F_\xi[\varphi])) \\
&= (F[g](\eta), (F[f](\xi), \varphi)) = (F[f](\xi) \cdot F[g](\eta), \varphi),
\end{aligned}$$

da cui seguono le uguaglianze (3.21).

(g) Formule analoghe sono anche valide per la trasformazione di Fourier F_x, per esempio: se $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+m})$, si ha

$$D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f], \qquad F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_y^\beta F_x[f]. \tag{3.22}$$

d. Esempi.

ESEMPIO 1. Definiamo il cosiddetto valore principale di Cauchy come il funzionale $\mathcal{P}(1/|x|)$ definito dall'uguaglianza

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^1).$$

Utilizzando il teorema di Cauchy (che si consente a scrivere $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(t)$ per un opportuno t tra 0 e x), si trova

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\, dx\right| \le 2\|\varphi'\|_\infty = 2 \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi'(x)|,$$

mentre un calcolo elementare conduce alla stima

$$\left|\int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, dx\right| \le \left(\int_{|x|>1} \frac{dy}{|y|(1+|y|)}\right) \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+|x|)|\varphi(x)| \le 2\ln 2 \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+|x|)|\varphi(x)|.$$

Quindi

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \varphi\right)\right| \le 2(1+\ln 2) \max\left(\sup_{x \in \mathbf{R}} (1+|x|)|\varphi(x)| + \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+|x|)|\varphi'(x)|\right),$$

e dunque, secondo il Lemma 3.1, $\mathcal{P}(1/|x|) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^1)$. Dimostriamo ora che

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2\ln|\xi|, \tag{3.24}$$

dove C è la cosiddetta costante di Eulero,

$$C = \int_0^1 \frac{1-\cos(u)}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{\cos(u)}{u}\,du.$$

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$\left(F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right],\varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, P[\varphi]\right) = \int_{-1}^1 \frac{F[\varphi](x)-F[\varphi](0)}{|x|}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|}\int \varphi(\xi)(e^{ix\xi}-1)\,d\xi\,dx + \int_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\int \varphi(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\,dx$$

$$= 2\int_0^1\int \varphi(\xi)\frac{\cos(x\xi)-1}{x}\,d\xi\,dx + 2\int_1^\infty\int \varphi(\xi)\frac{\cos(x\xi)}{x}\,d\xi\,dx$$

$$= 2\int \varphi(\xi)\int_0^1 \frac{\cos(x\xi)-1}{x}\,dx\,d\xi - 2\int_1^\infty\int \varphi'(\xi)\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx\,d\xi$$

$$= 2\int \varphi(\xi)\int_0^{|\xi|}\frac{\cos(u)-1}{u}\,du\,d\xi - 2\int \varphi'(\xi)\int_1^\infty du\,\frac{\sin(x\xi)}{x^2}\,dx\,d\xi$$

$$= 2\int \varphi(\xi)\left[\int_0^{|\xi|}\frac{\cos(u)-1}{u}\,du + \frac{d}{d\xi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\xi)}{x^2}\,dx\right]d\xi = -2\int \varphi(\xi)(C+\ln|\xi|)\,d\xi,$$

da cui deriva la formula (3.24).

(b) Esempio 2. Si ha in tre dimensioni

$$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}. \tag{3.25}$$

Considerando che la funzione $1/|x|^2$ è localmente sommabile in $\mathbf{R}^3$, per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ si ottiene la seguente successione di uguaglianze:

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right],\varphi\right) = \left(\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]\right) = \int \frac{1}{|x|^2}F[\varphi]\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\frac{1}{|x|^2}\int \varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi\,dx = \lim_{R\to\infty}\int \varphi(\xi)\int_{|x|<R}\frac{e^{i(\xi,x)}}{|x|^2}\,dx\,d\xi$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int \varphi(\xi)\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^{i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2}\rho^2\,d\psi\,\sin\theta\,d\theta\,d\rho\,d\xi$$

$$= 2\pi\lim_{R\to\infty}\int \varphi(\xi)\int_0^R\int_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho\mu}\,d\mu\,d\rho\,d\xi = 4\pi\lim_{R\to\infty}\int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\int_0^R \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\,d\rho\,d\xi. \tag{3.26}$$

Visto che

$$|\xi| \left| \int_R^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho \right| = \left| \frac{\cos(|\xi|R)}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos(|\xi|\rho)}{\rho^2}\, d\rho \right| \le \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R},$$

è possibile il passaggio il passaggio limite per $R \to \infty$ sotto il segno d'integrale nell'ultimo termine delle uguaglianze (3.26). Tenuto in conto che

$$\int_0^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}, \qquad |\xi| \ne 0,$$

in definitiva, si ottiene

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi \right) = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2} |\xi| \int_0^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho = 2\pi^2 \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\, d\xi,$$

da cui segue la formula (3.25).

4. Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace. Consideriamo l'equazione di Laplace in n variabili

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x). \tag{4.1}$$

Per calcolare la soluzione di questa equazione in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, bisogno utilizzare la trasformata di Fourier. Siccome $\Delta = \sum_{j=1}^n D^{\alpha_j}$ per $\alpha_j = (0, \cdots, 0, 2, 0, \cdots, 0)$ con il 2 al j-esimo posto, si ottiene dalla (4.1)

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n](\xi) = 1, \tag{4.2}$$

e quindi

$$F[\mathcal{E}_n](\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Si può dimostrare che

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, & n \ge 3, \end{cases}$$

dove σ_n è la misura dell'ipersfera S^{n-1} in $\mathbf{R}^n$.

Sia ora $n = 3$. In questo caso la funzione $-1/|\xi|^2$ è localmente sommabile in $\mathbf{R}^n$ e, quindi si ha

$$F[\mathcal{E}_3](\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}, \qquad \mathcal{E}_3 = -F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right].$$

Da ciò, utilizzando la formula (3.25), otteniamo per $n = 3$

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

In modo analogo si calcola $\mathcal{E}_n(x)$ per $n > 3$.

Bibliografia.

S66. L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.
V87. V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1987.