



MECCANICA RAZIONALE 1

Corso di 8 Crediti
Corso di Laurea Triennale
in Matematica
A.A. 2010-2011

Cornelis VAN DER MEE
(a cura del dottor Francesco Demontis)
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

cornelis@krein.unica.it
<http://bugs.unica.it/~cornelis>
oppure: <http://krein.unica.it/~cornelis>

Indice

I	Calcolo Vettoriale	1
1	Vettori applicati	1
2	Rappresentazione cartesiana di vettori	3
3	Cambiamento di coordinate	5
4	Lunghezza, curvatura e torsione di una curva	7
II	Cinematica del Punto	13
1	Velocità	14
2	Accelerazione	15
3	Moti Piani e Moti Centrali	17
4	Moti Armonici e Moti Armonici Smorzati	21
III	Teoria dei Momenti	25
1	Definizioni	25
2	Legge di variazione dei momenti	26
3	Asse centrale	27
4	Sistemi equivalenti e sistemi equilibrati	32
5	Vettori paralleli	35
6	Baricentri	36
7	Momenti d'inerzia	39
IV	Cinematica dei sistemi rigidi	43
1	Equazioni generali del moto	43
2	Prima proprietà caratteristica dei moti rigidi	45
3	Moti rigidi particolari	46
3.1	Moti rigidi traslatori	46
3.2	Moti rigidi rotatori	47
3.3	Moti rigidi rototraslatori	51
3.4	Moti rigidi elicoidali	52
4	Moti rigidi generali	54
4.1	Formule di Poisson	55

4.2	Derivata temporale di un vettore solidale al sistema rigido	58
4.3	Derivata temporale di un vettore non solidale al sistema rigido	59
4.4	Componenti della velocità angolare rispetto al riferimento solidale	60
5	Velocità e accelerazione in un moto rigido generale	61
5.1	Velocità in un moto rigido	61
5.2	Accelerazione in un moto rigido	62
6	Atto di moto	63
6.1	Definizione d atto di moto e asse di moto.	63
6.2	Composizione di atti di moto rigidi	67
7	Angoli di Eulero	68
7.1	Definizione degli angoli di Eulero	68
7.2	Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero	71
7.3	Espressione della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero	72
8	Esercizi	74
V Moti Relativi		79
1	Generalità	79
1.1	Legge di composizione delle velocità e teorema di Coriolis	81
2	Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili . . .	84
3	Applicazioni ai moti rigidi	86
3.1	Rotolamento di due superfici rigidi	86
3.2	Moti di precessione	87
3.3	Moti rigidi piani	90
VI Vincoli		93
1	Vincoli e loro classificazione	93
2	Coordinate lagrangiane e sistemi olonomi	96
3	Cenni sui sistemi anolonomi	98
4	Spostamenti effettivi e spostamenti virtuali	102
VII Dinamica Newtoniana		103
1	Meccanica di una particella	103
2	Meccanica di un sistema di particelle	108
3	Lavoro, energia cinetica e energia potenziale	111
3.1	Lavoro e energia cinetica	111
3.2	Forze conservative e energia potenziale	113
4	Vincoli e reazioni vincolari	118

VII	Forze Centrali e Problema dei Due Corpi	121
1	Cinematica	121
2	Baricentro e Forze Centrali	122
3	Forza Gravitazionale	125
4	Vettore di Laplace-Runge-Lenz	129
5	Problema dei Tre Corpi	130
IX	Calcolo delle Variazioni e Equazioni di Eulero-Lagrange	135
1	Calcolo delle Variazioni	135
2	Equazioni di Lagrange	139
3	Principio di Hamilton: Sistemi Vincolati	141
4	Momenti generalizzati	148
5	Lagrangiana per la Forza Magnetica	150
6	Moltiplicatori di Lagrange	153
A	Calcolo Differenziale in Più Variabili	157
1	Derivate parziali e direzionali	157
2	Nabla ∇	158
3	Potenziali e potenziali vettoriali	161
B	Pendolo Semplice	163
C	Esercizi: I	167
D	Esercizi: II	185
	Bibliografia	195

Capitolo I

Calcolo Vettoriale

In questo capitolo vengono presentati alcuni richiami di calcolo vettoriale nello spazio tridimensionale. Successivamente vengono introdotte le curve piane e spaziali e dimostrate le formule di Frenet. La maggior parte del materiale fa parte dei corsi di analisi e geometria del primo biennio.

1 Vettori applicati

Una coppia ordinata di punti distinti (A, B) individua nel senso della geometria ordinaria un *vettore geometrico*. Il primo punto A viene detto *origine* o *punto di applicazione* del vettore (A, B) , il punto B è detto invece *estremo libero*, la retta individuata dai punti A e B è detta *retta di applicazione* del vettore (A, B) . Il vettore viene indicato anche con il simbolo $(B - A)$. Tale ente nello spazio è dunque caratterizzato da tre proprietà: *direzione*, quella della sua retta d'applicazione; *verso*, quello dal primo estremo A al secondo estremo B ; *intensità*, data dalla misura del segmento AB , rispetto ad un'unità di misura prefissata. Quando A coincide con B avremo a che fare con il vettore nullo, che indicheremo con $\vec{0}$.

La relazione di uguaglianza in direzione, verso ed intensità è una relazione di equivalenza tra tutti i vettori geometrici. L'insieme di tutti i vettori equivalenti tra loro, aventi cioè stessa direzione, stesso verso e stessa intensità, costituisce la classe di equivalenza dei *vettori liberi*. Questi vettori sono proprio gli elementi di uno *spazio vettoriale*. Indicheremo i vettori con una lettera soprasssegnata con una freccia, \vec{v} , od anche con un sottosegno, \underline{v} , oppure con una lettera in grassetto, \mathbf{v} .

Il nostro spazio ha dimensione tre. Infatti, esistono tre vettori *linearmente indipendenti*, detti *base dello spazio*, mediante una combinazione lineare dei quali è possibile determinarne ogni altro. Se indichiamo con \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} tre vettori ortogonali tra loro e di modulo unitario (*versori*), allora un vettore \vec{v} si scrive

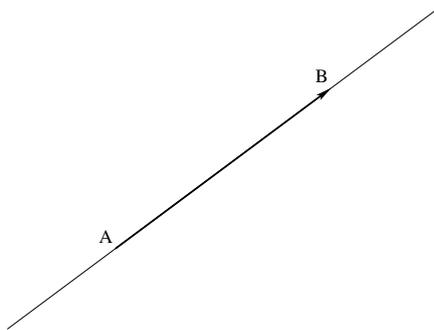


Figura I.1: Vettore.

nella forma

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

dove x , y e z sono le componenti del vettore \vec{v} secondo gli assi cartesiani aventi versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

È necessario prefissare un segmento unitario u come unità di misura. Quindi indicata con l la misura del segmento \overline{AB} rispetto ad u , il vettore libero \vec{v} è caratterizzato da una direzione, da un verso e da un *numero reale positivo* l , che rappresenta la sua misura rispetto al segmento unitario dato e si ha $v = |\vec{v}| = lu$. I vettori permettono di rappresentare le grandezze vettoriali nello spazio ordinario, ad esempio una velocità, una accelerazione, una forza, ecc. Basta interpretare il segmento unitario u come unità di misura della grandezza fisica in oggetto.

Lo spazio vettoriale non rappresenta ancora completamente lo spazio dove si svolgono i nostri fenomeni. Lo spazio vettoriale contiene solo i vettori liberi, che visti come classe di equivalenza, possono essere rappresentati tutti con il primo estremo nell'origine e possono essere intesi come spostamenti. Il nostro spazio ordinario contiene anche i punti, che possono essere ottenuti facendo uso dei vettori come spostamenti.

Riportiamo qui la definizione di spazio affine, e rimandiamo a dopo alcuni commenti.

Si dice *spazio affine* \mathbb{E} , a dimensione tre sul corpo \mathbb{R} , l'insieme ai cui elementi, detti *punti*, è associato l'insieme \mathbb{V} dei vettori liberi, chiamato *spazio vettoriale associato*, su cui è definita una applicazione da $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ in \mathbb{V} , che associa ad ogni coppia di punti un vettore di \mathbb{V} , ovvero due punti A e B individuano il vettore \vec{v} indicato con $A - B$, con le seguenti proprietà:

- i) per ogni A, B, C si ha $(A - C) + (C - B) + (B - A) = \vec{0}$;
- ii) per ogni $O \in \mathbb{E}$, l'applicazione che associa ad un punto P il vettore $(P - O)$ è una biezione di \mathbb{E} su \mathbb{V} .

I punti di \mathbb{R}^3 , questa volta visto come spazio di punti, possono essere individuati tramite un vettore libero \vec{v} , partendo dall'origine O di coordinate $(0, 0, 0)$, ed arrivando al punto P tramite il vettore \vec{v}

$$P = O + \vec{v},$$

dove ovviamente \vec{v} è proprio il vettore libero $(P - O)$ e le coordinate cartesiane (x, y, z) di P sono le componenti del vettore \vec{v} , rispetto al sistema di riferimento con origine in $O \equiv (0, 0, 0)$ ed assi con versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

Tramite un vettore \vec{w} si può individuare a partire da P un altro punto con la traslazione $Q = P + \vec{w}$. Quindi ad ogni coppia di punti Q e P è coordinato un vettore \vec{w} (lo spostamento da P a Q , indicato con $(Q - P)$).

Allo spazio delle nostre percezioni si può dare la struttura di uno spazio affine tridimensionale. Lo spazio \mathbb{R}^3 , dove noi operiamo, si può pensare come uno spazio affine, i cui punti sono i vettori e gli spostamenti sono ancora i vettori. Si osservi inoltre che lo spazio \mathbb{R}^3 è ricco di molte altre strutture che ci consentiranno di utilizzarlo anche per altri scopi.

2 Rappresentazione cartesiana di vettori

Fissare un origine $O \equiv (0, 0, 0)$ ed una terna di versori, due a due ortogonali \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , significa assegnare un *sistema di riferimento cartesiano ortogonale* $\mathbb{S} \equiv (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tale sistema si dirà destro (o levogiro) se i versi che si fissano sugli assi sono tali che l'asse z vede ruotare il semiasse positivo delle x in senso antiorario (contrario a quello delle lancette dell'orologio) per andare a sovrapporsi con una rotazione di $\pi/2$ sul semiasse positivo delle y . Una tale terna è ottenibile con le prime tre dita della mano destra, coordinando in direzione e verso il pollice della mano destra al semiasse x , l'indice al semiasse y , ed il dito medio al semiasse z ¹.

Dato un punto P dello spazio, esso è individuato nel sistema di riferimento fissato \mathbb{S} da tre scalari x , y e z . Dato un vettore \vec{v} , esso è individuato nel sistema di riferimento dalle componenti v_1 , v_2 e v_3 di \vec{v} secondo gli assi x , y e z .

Dati due vettori \vec{v} e \vec{w} , si definisce *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) la quantità scalare data da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \theta$$

¹Nota: I termini destro e levogiro sono solo apparentemente in contrasto l'uno con l'altro. Infatti destro si riferisce alla possibilità di utilizzare la regola della mano destra per individuare i tre assi, mentre levogiro indica che un osservatore disposto come l'asse z vede la rotazione che porta il semiasse positivo delle x su quello positivo delle y avvenire verso la sua sinistra (cioè in senso antiorario come affermato sopra)

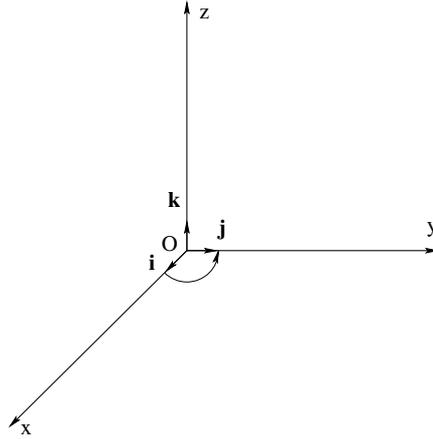


Figura I.2: Sistema di riferimento.

dove θ è l'angolo tra i due vettori. In termini di coordinate, il *prodotto scalare* di due vettori \vec{v} di componenti v_1, v_2, v_3 e \vec{w} di componenti w_1, w_2, w_3 è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$$

ed è indipendente dal sistema di riferimento prescelto.

Il *modulo* di un vettore \vec{v} (di componenti v_1, v_2, v_3) è quindi dato da

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

e viene detto anche intensità o *norma*.

Dati due vettori \vec{v} e \vec{w} si definisce *prodotto vettoriale* (o *prodotto esterno*) la quantità vettoriale data dal vettore \vec{z} di modulo $vw \sin \varphi$, dove φ è l'angolo formato dai vettori \vec{v} e \vec{w} , ed avente direzione \vec{n} normale al piano dei due vettori e verso tale che $\vec{v}, \vec{w}, \vec{n}$ formino una terna destra:

$$\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w} = (vw \sin \varphi) \vec{n}.$$

Il modulo del vettore ottenuto dal prodotto vettoriale di due vettori rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui vettori \vec{v} e \vec{w} . In componenti se $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ e $\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$, si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k},$$

dove simbolicamente si è fatto uso dello sviluppo del determinante di una matrice, con le solite regole dell'algebra lineare, per ottenere le componenti del prodotto vettoriale.

Dati tre vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , il *prodotto misto* è la quantità scalare

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = [\vec{u} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{w}$$

che si ottiene eseguendo prima il prodotto vettoriale e poi quello scalare. Esso è dato dallo sviluppo del determinante simbolico

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

È facile verificare che $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$, facendo un numero pari di scambi delle righe nel determinante (I.1). Il valore scalare ottenuto dal prodotto misto di tre vettori rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , applicati tutti nello stesso punto. È facile verificare che il prodotto misto tra tre vettori è nullo se e solo se almeno uno dei tre vettori è nullo oppure se i tre vettori sono complanari.

Dati tre vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , il *doppio prodotto vettoriale* tra i vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} è dato dal vettore

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w},$$

ottenuto eseguendo prima il prodotto vettoriale tra i primi due vettori e poi il restante. Esso è dato dalla seguente regola:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}. \quad (\text{I.2})$$

Inoltre,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = -(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}. \quad (\text{I.3})$$

Dalle formule (I.2) e (I.3) segue subito che non vale la proprietà associativa, ovvero nel caso in cui i tre vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} non siano complanari e il vettore \vec{v} non sia ortogonale al piano tra \vec{u} e \vec{w} , si ha

$$\underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}}_{\text{nel piano per } \vec{u} \text{ e } \vec{v}} \neq \underbrace{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})}_{\text{nel piano per } \vec{v} \text{ e } \vec{w}}.$$

3 Cambiamento di coordinate

La scelta del sistema di riferimento è in genere arbitraria. Da problema a problema può fare comodo scegliere un sistema di riferimento oppure un altro. È quindi necessario conoscere le formule per il cambiamento delle coordinate da un sistema di riferimento ortogonale ad un altro, anch'esso ortogonale.

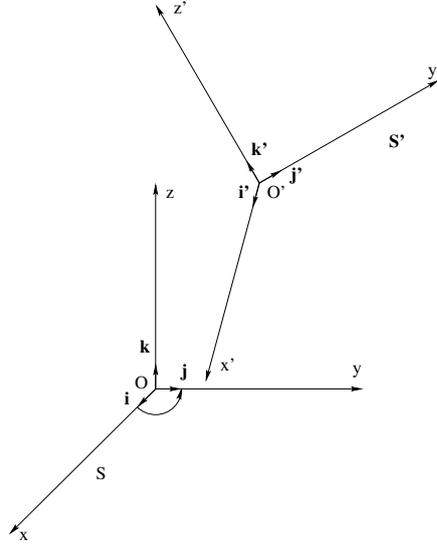


Figura I.3: Sistemi di riferimento \mathbb{S} e \mathbb{S}' .

Sia $P = (x_1, x_2, x_3)$ un punto riferito al sistema \mathbb{S} con origine O ed assi \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} . Sia \mathbb{S}' un nuovo sistema con origine O' ed assi \vec{i}' , \vec{j}' e \vec{k}' . Allora le coordinate (x'_1, x'_2, x'_3) del punto P nel nuovo sistema \mathbb{S}' sono date da

$$x'_i = x'_{0i} + \sum_{j=1}^3 T_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{I.4})$$

dove $(x'_{01}, x'_{02}, x'_{03})$ sono le coordinate dell'origine O rispetto alla terna \mathbb{S}' e T_{ij} sono le componenti di una opportuna matrice 3×3 ortogonale, cioè $T^T \cdot T = I$, ovvero in componenti

$$\sum_{i=1}^3 T_{ij}T_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kronecker, uguale ad 1 se $j = k$, uguale a 0 se $j \neq k$. La trasformazione inversa della (I.4) è data da

$$x_k = x_{0k} + \sum_{i=1}^3 T_{ik}x'_i, \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{I.5})$$

dove $x_{0k} = -\sum_{i=1}^3 T_{ik}x'_{0i}$.

4 Lunghezza, curvatura e torsione di una curva

Un punto P od un vettore \vec{v} possono dipendere da un parametro t variabile in un intervallo (t_0, t_1) . In questo caso si possono definire i concetti di limite e di funzione continua. Si può poi definire la derivata in un punto P o di un vettore \vec{v} , così come si fa per le funzioni scalari.

Ricordiamo ora due proprietà che verranno usate molte volte in questo corso.

1. La derivata di un vettore di modulo costante risulta ortogonale al vettore stesso. Infatti,

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{d(v_i^2)}{dt} = 2 \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

poichè abbiamo assunto costante v^2 . Vale anche il viceversa: se \vec{v} ed il suo derivato sono ortogonali allora il vettore \vec{v} ha modulo costante.

2. Se, per ogni t , un vettore \vec{v} è parallelo al suo derivato allora \vec{v} ha direzione invariabile. Infatti, se

$$\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

scrivendo $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}$ dove con \vec{e} si è indicato un versore del vettore \vec{v} , si ha:

$$\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = |\vec{v}|\vec{e} \wedge \left(\frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{e} + |\vec{v}| \frac{d\vec{e}}{dt} \right) = |\vec{v}|^2 \vec{e} \wedge \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}.$$

L'ultima equazione comporta $\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}$ e da qui l'invariabilità della direzione del vettore \vec{v} . Anche di questa proprietà vale il viceversa.

Le curve nel piano o nello spazio si possono introdurre come insiemi di livello di funzioni $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ (per i nostri scopi è sufficiente che siano di classe C^2), dove U è un sottoinsieme aperto in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 . In altre parole,

$$\text{Curva} = \begin{cases} \{(x_1, x_2) \in U : F(x_1, x_2) = 0\}, & \text{curva piana,} \\ \{(x_1, x_2, x_3) \in U : F(x_1, x_2, x_3) = 0\}, & \text{curva spaziale.} \end{cases}$$

Un punto P della curva, di coordinate (x_1, x_2) , si dice *non singolare* se il gradiente della F calcolato nel punto (x_1, x_2) o (x_1, x_2, x_3) non è nullo. Una curva i cui punti sono tutti non singolari si dice una *curva regolare*.

Se la curva è data in forma parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, cioè, se

$$\text{Curva} = \{(t, \mathbf{x}(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$$

per un'opportuna funzione continua $\mathbf{x} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (curva piana) oppure $\mathbf{x} : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (curva spaziale), allora un punto $\mathbf{x}(t_0)$ si dice non singolare se $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Secondo il Teorema delle Funzioni Implicite, ogni curva per cui la F è di classe C^1 può essere scritta in forma parametrica in un opportuno intorno di ciascun punto di regolarità.

Esempio I.1 Le circonferenze $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ con centro l'origine e raggio $R > 0$ sono curve regolari. Ponendo $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2$, risulta che, per ogni punto (x_1, x_2) della circonferenza, il gradiente della F è sempre un vettore di norma 2. La curva è facilmente parametrizzabile ponendo $x_1(t) = R \cos(t)$ e $x_2(t) = R \sin(t)$, dove $t \in [0, 2\pi]$.

La *lunghezza* l di una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in (a, b)$, è data dall'integrale

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} dt.$$

Nel caso particolare di un grafico, $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))$, risulta

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

nel caso di una curva piana e

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2} dt$$

nel caso di una curva spaziale (dove $f = (f_1, f_2)$). È facile dimostrare che la lunghezza di una curva non dipende dalla scelta della sua parametrizzazione.

Qualsiasi curva differenziabile e non singolare ammette una *parametrizzazione naturale* con un parametro s (detto *lunghezza d'arco* oppure *ascissa curvilinea*):

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt.$$

Di conseguenza,

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{x}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}.$$

In altre parole,

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s) \right| = 1. \tag{I.6}$$

Il vettore unitario

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$$

è detto *versore tangente* alla curva.

Nei punti in cui $(d^2\mathbf{x}/ds^2) \neq \vec{0}$ è definito il vettore unitario

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2},$$

detto *versore normale principale* e dove la sua norma

$$k(s) = \left| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right|$$

è detta *curvatura*. Il suo reciproco $R(s) = [1/k(s)]$ è detto *raggio di curvatura*. Di conseguenza, risulta la prima identità di Frenet:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}. \quad (\text{I.7})$$

Il piano contenente i versori tangente e normale principale \mathbf{t} e \mathbf{n} si chiama *piano osculatore* nel punto $\mathbf{x}(t)$. Questo piano contiene la circonferenza passante per il punto $\mathbf{x}(t)$ che è la migliore approssimazione della curva in un intorno del punto $\mathbf{x}(t)$.

Esempio I.2 Consideriamo la circonferenza con centro l'origine e raggio $R > 0$ parametrizzata da $\mathbf{x}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$, dove $\omega > 0$. Si ha

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R \sin(\omega t')]^2 + [\omega R \cos(\omega t')]^2} dt' = \omega R t.$$

Quindi

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t)) = (-\sin(s/R), \cos(s/R)).$$

Dunque

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R)).$$

Di conseguenza, la curvatura $k(s) = (1/R)$ e il raggio di curvatura $R(s) = R$. Il versore normale principale $\mathbf{n}(s) = -(\cos(s/R), \sin(s/R))$.

Consideriamo ora il vettore unitario

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

detto *versore binormale*. Allora la terna costituita dai versori \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} è ortonormale e genera un sistema di coordinate destrorso.

Deriviamo ora le altre due identità di Frenet. Siccome $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, si ha

$$0 = \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}{ds} = 2\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

e quindi $[d\mathbf{n}/ds]$ è una combinazione lineare di \mathbf{t} e \mathbf{b} :

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = c_1(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}$$

per opportune costanti $c_1(s)$ e $c_2(s)$. D'altra parte, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ implica che

$$0 = \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})}{ds} = \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} = k(s)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \{c_1(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}\} \cdot \mathbf{t} = k(s) + c_1(s),$$

e quindi $c_1(s) = -k(s)$. Inoltre, derivando $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} \\ &= [k(s)\mathbf{n}] \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge [-k(s)\mathbf{t} + c_2(s)\mathbf{b}] \\ &= c_2(s)(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) = c_2(s)[\mathbf{t} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n})] \\ &= c_2(s)[-(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}] = -c_2(s)\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Chiamando $\chi(s) \stackrel{\text{def}}{=} -c_2(s)$ *torsione* oppure *seconda curvatura*, otteniamo le seguenti identità di Frenet:²

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s), \tag{I.8a}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}(s) - \chi(s)\mathbf{b}(s), \tag{I.8b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \chi(s)\mathbf{n}(s). \tag{I.8c}$$

Si vede facilmente che la torsione $\chi(s) \equiv 0$ se e solo se la curva è piana. Infatti, $\chi(s) \equiv 0$ implica che il versore binormale $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ non dipende da s e quindi il piano contenente $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ non dipende da s . Quest'ultimo fatto implica che la curva è piana.

Esempio I.3 [Elica circolare cilindrica] Consideriamo la curva spaziale

$$\mathbf{x}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), ct),$$

²Jean Frédéric Frenet (1816-1900). Risultato pubblicato nel 1847 (tesi di dottorato a Tolosa) e nel 1852 (in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*).

dove R , ω e c sono costanti positive. Allora

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[-\omega R \sin(\omega t')]^2 + [\omega R \cos(\omega t')]^2 + c^2} dt' = t\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}.$$

Quindi il versore tangente vale

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)} \\ &= \left(\frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin(\omega t), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos(\omega t), \frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right) \\ &= \left(\frac{-\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza, la curvatura $k(s) = [\omega^2 R / (\omega^2 R^2 + c^2)]$, mentre

$$\mathbf{n}(s) = - \left(\cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), 0 \right).$$

Calcolando

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) &= \left(\frac{c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{-c}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}\right), \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}} \right), \end{aligned}$$

otteniamo $[d\mathbf{b}/ds] = \chi(s)\mathbf{n}$, dove la torsione

$$\chi(s) = -\frac{c\omega}{\omega^2 R^2 + c^2}.$$

Esempio I.4 [Spirale logaritmica] Consideriamo la curva di equazione

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \left\{ \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \right\}.$$

Calcolarne la curvatura, i versori tangenziale, normale e binormale, e la torsione. Fare altrettanto per la curva di equazione

$$\vec{x}(t) = e^{-t} \left\{ \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \vec{k} \right\}.$$

Capitolo II

Cinematica del Punto

Il moto di un punto P al variare del tempo t viene descritto da una funzione che supponiamo almeno continua

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

di t a valori in \mathbb{R}^3 . Il tempo t appartiene ad un intervallo della retta reale che contiene il tempo iniziale t_0 (quasi sempre $t_0 = 0$). La *traiettoria* o *orbita* è la curva in \mathbb{R}^3 descritta dal punto P . Analiticamente essa è data dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (\text{II.1})$$

Tali equazioni si dicono *equazioni del moto* del punto P . Il moto si dice *piano* se la traiettoria è contenuta in un piano in \mathbb{R}^3 . Il moto si dice invece *rettilineo* se la traiettoria è contenuta in una retta.

Spesso conviene considerare nota la traiettoria, analiticamente per il tramite delle equazioni parametriche. In tal caso si esprime la posizione di P nella lunghezza s dell'arco P_0P , misurata a partire da una posizione P_0 prefissata ad arbitrario ($P_0 = P(t_0)$). Il moto di P risulta definito da un'unica equazione

$$s = s(t),$$

che si chiama *equazione oraria* del moto. Il grafico della funzione $s = s(t)$ con il tempo t come ascissa e il parametro s come ordinata si chiama *diagramma orario* del moto.

In questo capitolo studiamo il moto di un punto e in particolare la velocità e l'accelerazione del punto al variare del tempo t . I risultati ottenuti vengono poi applicati ai moti centrali, armonici ed armonici smorzati.

1 Velocità

a. Moto uniforme. Supponendo che la lunghezza $s = s(t)$ dell'arco lungo la traiettoria, percorsa dal punto P a partire dalla sua posizione iniziale P_0 , sia proporzionale a t , otteniamo il cosiddetto *moto uniforme*. In tal caso si ha

$$s(t) = v(t - t_0),$$

dove la costante di proporzionalità v si chiama *velocità*. Si osservi che un moto uniforme non è necessariamente rettilineo: Il moto apparente del Sole e il moto delle lancette dell'orologio sono ambedue uniformi e non rettilinei.

b. Velocità scalare. Generalizziamo ora la definizione di velocità. Fissiamo due istanti t e $t + \Delta t$ e sia Δs la lunghezza d'arco percorso da P nell'intervallo di tempo Δt . La velocità media è data dal rapporto $(\Delta s / \Delta t)$. La *velocità scalare* $\dot{s}(t)$ all'istante t viene definita dal limite

$$\dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

I moti uniformi sono quelli per cui la velocità scalare è costante: $\dot{s}(t) \equiv v$. Il valore assoluto $|\dot{s}(t)|$ si chiama *velocità intensiva* all'istante t .

c. Velocità vettoriale. Invece di limitarci alla traiettoria e non renderci conto dello spazio ambiente, definiamo la velocità del punto P rispetto allo spazio ambiente. A tal fine consideriamo lo spostamento del punto P nello spazio ambiente \mathbb{R}^3 . Si dice che il moto ha *velocità vettoriale costante* se, fissati due istanti t e $t + \Delta t$, il vettore

$$\mathbf{v} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)$$

è costante. È facile vedere che il moto ha velocità vettoriale costante se e solo se esso è uniforme e rettilineo. In tal caso

$$s(t) = \|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\| = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2 + (z(t) - z(t_0))^2},$$

e quindi la velocità scalare è il modulo della velocità vettoriale: $v = \|\mathbf{v}\|$.

In generale, definiamo la velocità vettoriale \mathbf{v} nel seguente modo:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}.$$

Calcolando il limite componente per componente, otteniamo

$$\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

dove

$$\begin{aligned}v_x(t) = \dot{x}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\v_y(t) = \dot{y}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \\v_z(t) = \dot{z}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.\end{aligned}$$

d. Legame tra velocità scalare e velocità vettoriale. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \dot{s}(t) = \dot{s}(t)\mathbf{t}, \quad (\text{II.2})$$

dove \mathbf{t} è il versore tangente alla traiettoria. In altre parole, la velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare per il versore tangente. In generale, la velocità scalare ed il versore tangente dipendono ambedue dal tempo t .

2 Accelerazione

a. Moto uniformemente vario. Il moto di un punto P si dice *uniformemente vario* se la sua velocità scalare è una funzione lineare del tempo t . In altre parole, se

$$\dot{s}(t) = at + b, \quad (\text{II.3})$$

dove a e b sono opportune costanti. La costante a si chiama *accelerazione scalare* e la costante b *velocità scalare iniziale* (solitamente si assume $t_0 = 0$). Il moto si dice *accelerato* se $a > 0$ e *ritardato* se $a < 0$. Integrando la (II.3), otteniamo l'equazione oraria del moto:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c, \quad (\text{II.4})$$

dove la costante c di integrazione è l'ascissa del punto mobile nell'istante $t = 0$. La (II.4) si può scrivere nella seguente forma:

$$s(t) = \frac{1}{2}a \left(t + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{2ac - b^2}{2a}.$$

Di conseguenza, il diagramma orario di un moto uniformemente vario è una parabola, avente l'asse di simmetria parallelo all'asse s (essendo la retta $t = -(b/a)$) e volgente la concavità verso s positivo o negativo secondo che $a > 0$ ovvero $a < 0$.

Il primo a studiare sistematicamente il moto uniformemente vario è stato Galileo Galilei (1564-1642). Facendo cadere oggetti diversi dalla torre di Pisa,

osservò che tutti gli oggetti cadevano con la stessa accelerazione scalare costante, $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$. In altre parole Galileo capì che la legge matematica esprime la caduta degli oggetti è la (II.4) con le costanti a , b e c non dipendenti dall'oggetto.

b. Accelerazione scalare. Si definisce l'*accelerazione scalare* come

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Cioè, l'accelerazione scalare è la derivata della velocità scalare rispetto al tempo t . Il moto è uniformemente vario se e solo se è rettilineo ed ha accelerazione scalare costante.

c. Accelerazione vettoriale. Analogamente alla velocità vettoriale si definisce l'*accelerazione vettoriale* nel seguente modo:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

La derivata rispetto al tempo t può essere calcolata componente per componente:

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)),$$

dove i pedici x , y e z denotano le componenti lungo i rispettivi assi e

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \dot{v}_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \\ a_y(t) &= \dot{v}_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}, \\ a_z(t) &= \dot{v}_z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Ovviamente, l'accelerazione scalare è data da

$$a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}.$$

Si vede facilmente che il moto ha accelerazione costante se e solo se il moto è rettilineo e uniformemente vario.

d. Legame tra l'accelerazione scalare e l'accelerazione vettoriale. Il legame tra l'accelerazione scalare e quella vettoriale è una generalizzazione delle (II.2) e viene trovata calcolando la (II.2) rispetto a t . Risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)\dot{\mathbf{t}}(t) \\ &= \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ &\stackrel{(I.7)}{=} \ddot{s}(t)\mathbf{t} + \dot{s}(t)^2 k(s)\mathbf{n}, \end{aligned}$$

dove $k(s)$ è la curvatura della traiettoria, \mathbf{t} è il versore tangente e \mathbf{n} è il versore normale principale. Quest'ultima identità può essere scritta nella forma

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t)\mathbf{t} + k(s)v^2\mathbf{n}, \quad (\text{II.5})$$

dove $\ddot{s}(t)$ e $k(s)v^2$ si chiamano rispettivamente *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *accelerazione centripeta*. L'accelerazione vettoriale $\mathbf{a}(t)$ appartiene al piano osculatore della traiettoria nel punto $\mathbf{x}(t)$.

Esempio II.1 Consideriamo il moto di un punto P descritto dalle equazioni

$$x(t) = \frac{1}{2}(kt - \sin(kt)\cos(kt)), \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(kt), \quad z(t) = \sin(kt),$$

dove $k > 0$ è una costante. In tal caso la velocità vettoriale è data da

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos^2(kt) + \sin^2(kt)) = k \sin^2(kt), \\ \dot{y}(t) = k \sin(kt) \cos(kt), \\ \dot{z}(t) = k \cos(kt). \end{cases}$$

Quindi

$$v^2 = k^2 [\sin^4(kt) + \sin^2(kt)\cos^2(kt) + \cos^2(kt)] = k^2.$$

Quindi $v(t) \equiv k$. In altre parole, il moto è uniforme e $\ddot{s} = 0$.¹ L'accelerazione vettoriale è data da

$$\ddot{x}(t) = k^2 \sin(2kt), \quad \ddot{y}(t) = k^2 \cos(2kt), \quad \ddot{z}(t) = -k^2 \sin(kt).$$

Dunque l'accelerazione scalare vale

$$a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = k^2 \sqrt{1 + \sin^2(kt)}.$$

Poichè $\ddot{s}(t) \equiv 0$, dalla (II.5) ricaviamo $a(t) = k(s)v^2$; quindi

$$k(s) = \sqrt{1 + \sin^2(kt)} = \sqrt{1 + \sin^2(s)}.$$

3 Moti Piani e Moti Centrali

Consideriamo ora il moto di un punto P nel piano xy , cioè supponiamo che $z(t) \equiv 0$. Supponiamo inoltre di aver fissato un riferimento cartesiano ortogonale

¹Si può verificare facilmente quest'ultima equazione. Infatti $s(t) = \int_0^t \sqrt{k^2} dt = kt$, $\dot{s}(t) = k$ e $\ddot{s}(t) = 0$.

Oxy nel piano del moto. In tal caso possiamo esprimere tutte le quantità nelle coordinate polari definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \theta = (y/x), \end{cases}$$

dove $r \geq 0$ e θ appartiene ad un intervallo semiaperto di lunghezza 2π (diciamo: $0 \leq \theta < 2\pi$). Convertendo le (II.1) in coordinate polari, otteniamo le *equazioni del moto in coordinate polari*

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Introduciamo il *versore radiale* \mathbf{u} ed il *versore trasverso* \mathbf{w} da

$$\mathbf{u} = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}, \quad \mathbf{w} = -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}, \quad (\text{II.6})$$

dove \vec{i} e \vec{j} sono i versori degli assi x e y del riferimento fissato Oxy . Allora

$$r\mathbf{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad r\mathbf{w} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Calcolando la derivata della (II.6) rispetto al tempo t si ottiene

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\theta} \left\{ -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j} \right\} = \dot{\theta}\mathbf{w}, \quad (\text{II.7a})$$

$$\dot{\mathbf{w}} = -\dot{\theta} \left\{ (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j} \right\} = -\dot{\theta}\mathbf{u}. \quad (\text{II.7b})$$

Di conseguenza,

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}. \quad (\text{II.8})$$

Quindi la velocità vettoriale \mathbf{v} ha due componenti: la *velocità radiale* $v_r \stackrel{\text{def}}{=} \dot{r}$ lungo il versore \mathbf{u} e la *velocità trasversa* $r\dot{\theta}$ lungo il versore \mathbf{w} . La quantità

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}$$

si chiama *velocità angolare*. Inoltre, utilizzando l'ortogonalità dei versori \mathbf{u} e \mathbf{w} , troviamo la velocità scalare

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}.$$

Calcolando la derivata della (II.8) rispetto a t otteniamo la seguente espressione per l'accelerazione vettoriale:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r}\mathbf{u} + \dot{r}\dot{\mathbf{u}} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + r\ddot{\theta}\mathbf{w} + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{w}} \\ &\stackrel{(\text{II.7})}{=} \ddot{r}\mathbf{u} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{w} + r\ddot{\theta}\mathbf{w} - r\dot{\theta}^2\mathbf{u} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

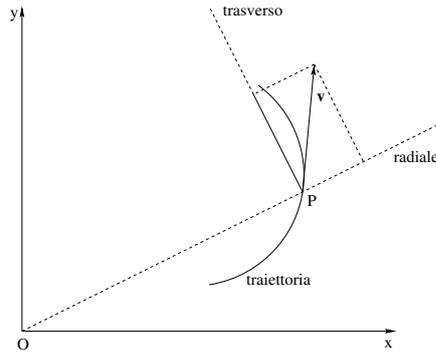


Figura II.1: Moto piano in coordinate polari.

Mentre il punto P si muove, il raggio vettore OP descrive un'area. Muovendosi da $P = P(t)$ a $P' = P(t + dt)$, il raggio vettore OP non cambia in modo significativo se dt è infinitesimo. Approssimativamente, l'area tracciata dal raggio vettore è l'area del settore circolare di raggio $r = |OP|$ e angolo $d\theta$, cioè

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} dt.$$

Dunque definiamo la cosiddetta *velocità areale* \dot{A} rispetto al centro O come

$$\boxed{\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}} \quad (\text{II.10})$$

Deriviamo ora altre due espressioni per la velocità angolare. La prima è la seguente:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(xy\dot{y} - \dot{x}y). \quad (\text{II.11})$$

Infatti, utilizzando che $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, risulta

$$\begin{aligned} xy\dot{y} - \dot{x}y &= r(\cos \theta) \frac{d}{dt}(r \sin \theta) - r(\sin \theta) \frac{d}{dt}(r \cos \theta) \\ &= r(\cos \theta) \{ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \} + r(\sin \theta) \{ \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \} \\ &= r^2\dot{\theta} \{ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \} + r\dot{r} \{ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta \} \\ &= r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}, \end{aligned}$$

il che dimostra la (II.11). Ora dimostriamo la seconda espressione

$$\dot{A} = \left\| \frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v} \right\|. \quad (\text{II.12})$$

Infatti, poichè $(P - O) = r\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}$, si ha

$$\begin{aligned}(P - O) \wedge \mathbf{v} &= (r\mathbf{u}) \wedge (\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w}) \\ &= r^2\dot{\theta}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = 2\dot{A}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}),\end{aligned}$$

il che dimostra la (II.12). Il vettore $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano passante per l'origine e la velocità vettoriale \mathbf{v} e ha la velocità areale come la sua lunghezza.

Una situazione interessante è quella del cosiddetto *moto centrale*, in cui cioè il moto del punto P è tale che ad ogni istante t l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ è diretta verso l'origine O , cioè che ad ogni istante

$$(P - O) \wedge \mathbf{a} = \vec{0}.$$

In tal caso

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(r\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} \right] \\ &= \frac{1}{2}(\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\mathbf{u}}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \underbrace{(r\mathbf{u}) \wedge \mathbf{a}}_{=\vec{0}} \\ &\stackrel{(II.7a)}{=} \frac{1}{2} \underbrace{(\dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w})}_{=\mathbf{v}, \text{ per (II.8)}} \wedge \mathbf{v} = \vec{0}.\end{aligned}\tag{II.13}$$

Questa relazione ha due corollari:

- a. La lunghezza del vettore $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$, la velocità areale \dot{A} , non dipende dal tempo t .
- b. Esiste un vettore ortogonale al piano del moto (cioè, ortogonale a \mathbf{v} ed a $(P - O) = r\mathbf{u}$) che non dipende dal tempo t . Quindi il moto è piano e si svolge nel piano passante per O e ortogonale al vettore $\frac{1}{2}(P - O) \wedge \mathbf{v}$.

Concludiamo con la derivazione della formula di Binet. Questo risultato specializzato viene spesso applicato alla derivazione della prima legge di Keplero.²

Teorema II.2 (Formula di Binet) *Se il moto è centrale con velocità areale \dot{A} , allora l'accelerazione radiale a_r è data dall'espressione*

$$a_r = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \right\}.\tag{II.14}$$

²Johannes Kepler (1571-1630) pubblicò le cosiddette leggi di Keplero in *Astronomia Nova* (1609).

Dimostrazione. Si ricordi che $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ e quindi $\dot{\theta} = 2\dot{A}/r^2$. Si ha

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2\dot{A}}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -2\dot{A}\frac{d(1/r)}{d\theta}.$$

Dunque

$$\ddot{r} = -2\dot{A}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}.$$

Di conseguenza,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} - \frac{4\dot{A}^2}{r^3} = -\frac{4\dot{A}^2}{r^2}\left\{\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right\},$$

il che dimostra la (II.14). □

Supponiamo che $a_r = -\gamma/r^2$, essendo γ un'opportuna costante positiva. In tal caso la formula di Binet (II.14) implica che

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2}.$$

Quest'equazione differenziale ha la soluzione generale

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{\gamma}{4\dot{A}^2} + c_1 \cos(\theta - \theta_0),$$

dove c_1 e θ_0 sono opportune costanti. Allora

$$r(t) = \frac{4\dot{A}^2/\gamma}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

dove $e = [4c_1\dot{A}^2/\gamma]$ è una costante. Per $e = 0$ la traiettoria risulta una circonferenza, per $e \in (-1, 1)$ un'ellisse, per $e = \pm 1$ una parabola, e per $e > 1$ o per $e < -1$ un'iperbole (discuteremo in modo più dettagliato questo argomento nel Cap. VIII).

4 Moti Armonici e Moti Armonici Smorzati

Le equazioni del moto per il *moto circolare uniforme* sono le seguenti:

$$x = R \cos(\omega t), \quad y = R \sin(\omega t), \quad z = 0,$$

oppure

$$\mathbf{x} = R\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j},$$

dove il raggio R e la velocità angolare ω sono costanti positive. In tal caso la velocità e l'accelerazione sono date da

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\omega R \sin(\omega t) \mathbf{i} + \omega R \cos(\omega t) \mathbf{j} = \omega R \mathbf{w}, \\ \mathbf{a} &= -\omega^2 R \cos(\omega t) \mathbf{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{x} = -\omega^2 R \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Il moto armonico viene descritto dall'equazione del moto

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0),$$

dove R e ω sono opportune costanti positive e θ_0 è un'opportuna costante reale. Un tale modo è periodico nel senso che

$$x(t + T) \equiv x(t),$$

dove il periodo $T = (2\pi/\omega)$, $1/T$ si dice *frequenza* e ω si chiama *velocità angolare* o *frequenza angolare*. L'equazione del moto è soluzione unica dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

sotto le condizioni iniziali

$$x(0) = R \cos \theta_0, \quad \dot{x}(0) = -\omega R \sin \theta_0.$$

Esistono numerosi applicazioni concrete del moto armonico. Un'interessante applicazione è il moto della molla in assenza di attrito descritta dall'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -kx(t),$$

dove k è un'opportuna costante positiva (la costante di elasticità della molla). La sua soluzione generale è data da

$$x(t) = x(0) \cos(t\sqrt{k}) + \dot{x}(0) \frac{\sin(t\sqrt{k})}{\sqrt{k}}.$$

Un'altra applicazione consiste nel circuito LC (essendo C un capacitore e L un'induttanza). La carica elettrica sul capacitore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + LCQ(t) = 0.$$

La soluzione generale di quest'ultima equazione differenziale ha la forma

$$Q(t) = Q(0) \cos(t\sqrt{LC}) + I(0) \frac{\sin(t\sqrt{LC})}{\sqrt{LC}},$$

dove $Q(0)$ è la carica iniziale e $I(0) = \dot{Q}(0)$ è la corrente iniziale che passa per il circuito.

In molte applicazioni il moto armonico viene smorzato. Per esempio, la molla è sottoposta ad una forza d'attrito proporzionale alla velocità che ha l'effetto di ridurre l'ampiezza delle oscillazioni. Un altro esempio consiste nel circuito RCL contenente un condensatore, un'induttanza ed una resistenza. In tal caso la carica $Q(t)$ sul condensatore verifica l'equazione differenziale

$$\ddot{Q}(t) + RC\dot{Q}(t) + LCQ(t) = 0,$$

dove L , R e C sono opportune costanti positive.

In generale, l'equazione del moto armonico smorzato è un'equazione differenziale del seguente tipo:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

dove k e b sono opportune costanti positive. Sostituendo $x = e^{\lambda t}$ arriviamo alla cosiddetta equazione caratteristica

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0. \tag{II.15}$$

Si possono presentare tre casi a seconda che l'equazione (II.15) ammetta radici complesse coniugate, una radice reale con molteplicità algebrica due o due radici reali distinte. Più precisamente, si ha:

- a. $0 < b^2 < 4k$. In tal caso la (II.15) ha due zeri complessi coniugati, $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4k - b^2}$. La soluzione ha la forma

$$x(t) = e^{-bt/2} \left[x(0) \left\{ \cos(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma} \sin(\gamma t) \right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma} \sin(\gamma t) \right],$$

dove $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - b^2}$.

- b. $b^2 = 4k > 0$. In tal caso la (II.15) ha il singolo zero doppio $\lambda = -(b/2)$. La soluzione ha la forma

$$x(t) = x(0) \left(1 + \frac{bt}{2} \right) e^{-bt/2} + \dot{x}(0) t e^{-bt/2}.$$

- c. $b^2 > 4k > 0$. In tal caso ci sono due zeri reali, $\lambda = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$, ambedue negativi. La soluzione ha la forma

$$x(t) = e^{-bt/2} \left[x(0) \left\{ \cosh(\gamma t) + \frac{b}{2\gamma} \sinh(\gamma t) \right\} + \frac{\dot{x}(0)}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right],$$

dove $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4k}$.

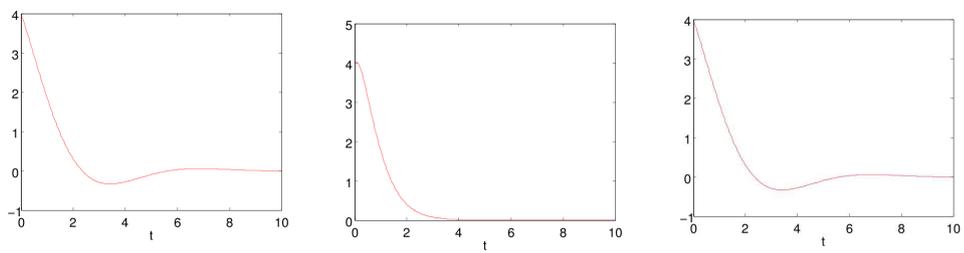


Figura II.2: Grafici delle funzioni $x(t)$ per $k = 1$, $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 1$ nei casi $b = 1$, $b = 2$ e $b = 3$.

Capitolo III

Teoria dei Momenti

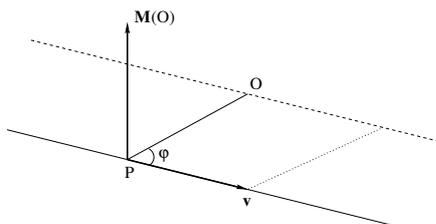
In questo capitolo ci occuperemo della teoria dei momenti. Nelle ultime due sezioni si introducono il baricentro di una distribuzione di masse e il momento d'inerzia di una distribuzione di masse rispetto ad un asse fissato. La distribuzione delle masse potrebbe essere discreta (trattandosi di un numero di masse puntuali) o continue (trattandosi di una densità di masse).

1 Definizioni

Consideriamo innanzitutto un solo vettore (P, \vec{v}) nello spazio e definiamone il suo momento rispetto ad un punto O . Passeremo poi a considerare un sistema di vettori applicati nello spazio.

Definizione III.1 Sia O un punto dello spazio e sia (P, \vec{v}) un vettore applicato. Si dice *momento* del vettore applicato (P, \vec{v}) rispetto al punto O il vettore (libero)

$$\vec{M}(O) = (P - O) \wedge \vec{v}.$$



Il punto O viene anche detto centro di riduzione o *polo*, ed il momento prende il nome di *momento polare*. I vettori $(P - O)$, \vec{v} e $\vec{M}(O)$ costituiscono una terna positiva. Il modulo del momento è dato da

$$M(O) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{M}(O)| = \overline{PO} v \sin \varphi,$$

pari all'area del parallelogramma costruito sui vettori (P, \vec{v}) e $(P - O)$. È facile verificare le seguenti proprietà:

- i) Il momento di (P, \vec{v}) rispetto ad O non varia se si sposta il vettore lungo la propria retta di azione.
- ii) Il momento di (P, \vec{v}) rispetto ad O non varia se si sposta il punto O su una retta parallela a \vec{v} .

Fissata una retta r orientata di versore \vec{u} e calcolato il momento di (P, \vec{v}) rispetto ad un punto O appartenente ad essa, si vede facilmente che lo scalare $M_u \stackrel{\text{def}}{=} \vec{M}(O) \cdot \vec{u}$ è indipendente dalla scelta di O su r . Tale scalare prende il nome di *momento assiale*.

Consideriamo ora un sistema S di vettori applicati (P_i, \vec{v}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Definizione III.2 Si dice *risultante* del sistema di vettori applicati S , il vettore (libero)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i.$$

Definizione III.3 Si dice *momento risultante* del sistema di vettori applicati S rispetto al polo O , il vettore somma

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{v}_i. \quad (\text{III.1})$$

Analogamente a quanto fatto sopra, si può definire il *momento risultante assiale* $M_u = \vec{M}(O) \cdot \vec{u}$, \vec{u} versore della retta assegnata.

Mediante la definizione (III.1) abbiamo costruito il campo vettoriale dei momenti relativo al sistema S , che associa ad ogni punto dello spazio \mathbb{R}^3 il vettore (libero) $\vec{M}(O)$. Per studiare il campo $O \mapsto \vec{M}(O)$ conviene indagare come varia il momento al variare del polo O .

2 Legge di variazione dei momenti

Valutiamo il momento risultante del sistema S rispetto ad un nuovo punto O' :

$$\begin{aligned} \vec{M}(O') &= \sum_{i=1}^n (P_i - O') \wedge \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{v}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \\ &= \vec{M}(O) + (O - O') \wedge \vec{R}, \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

dove \vec{R} è il risultante del sistema dei vettori. La (III.2) è nota come formula di trasposizione dei momenti, che dà la legge di variazione del momento risultante del sistema S al variare del polo.

Dalla (III.2) si vede subito che $\vec{M}(O') = \vec{M}(O)$ se e solo se la retta tra O e O' è parallela al risultante $\vec{R} \neq \vec{0}$. Se invece $\vec{R} = \vec{0}$, allora $\vec{M}(O)$ è invariante al variare del polo O .

Moltiplicando l'ultima riga della (III.2) da \vec{R} otteniamo

$$\vec{M}(O') \cdot \vec{R} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R} + \underbrace{(O - O') \wedge \vec{R} \cdot \vec{R}}_{=0} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R}. \quad (\text{III.3})$$

La (III.3) risulta invariante al variare di O ed è detta *invariante scalare* del sistema S . Indicato il componente di $\vec{M}(O)$ secondo la direzione del risultante con

$$\vec{M}_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{M}(O) \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R}, \quad (\text{III.4})$$

tale componente non varia al variare di O ed è detto *invariante vettoriale* del sistema S .

3 Asse centrale

Indicato $\vec{M}_n(O)$, il componente di $\vec{M}(O)$ normale alla direzione di \vec{R} , la formula (III.2) si può scrivere

$$\vec{M}(O') = \vec{M}_p + \vec{M}_n(O) + (O - O') \wedge \vec{R},$$

dove il termine di variazione $(O - O') \wedge \vec{R}$ influisce soltanto sulla parte normale $\vec{M}_n(O)$. Nasce spontanea la domanda se esistono punti dello spazio O' , tali che $\vec{M}(O')$ si riduca alla sola parte parallela \vec{M}_p , cioè tale da aversi $\vec{M}(O') = \vec{M}_p$.

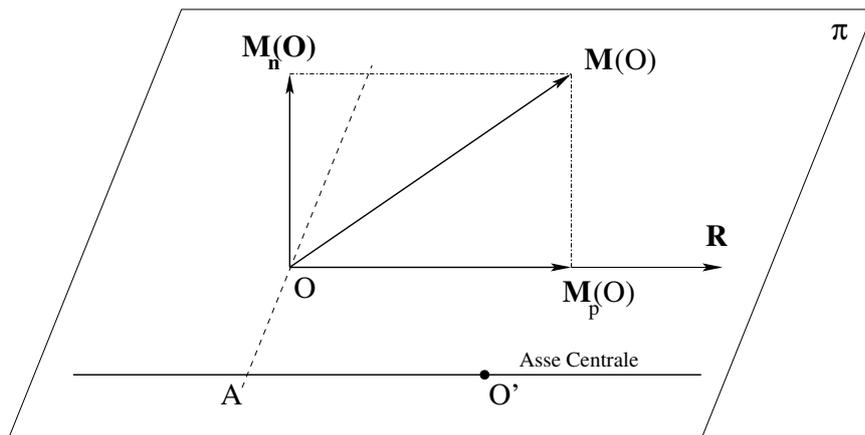
Si tratta quindi di studiare l'equazione vettoriale

$$\vec{M}_n(O) = (O' - O) \wedge \vec{R} \quad (\text{III.5})$$

nell'incognita $(O' - O)$. Moltiplicando scalarmente per $(O' - O)$ la (III.5), si ha

$$\vec{M}_n(O) \cdot (O' - O) = (O' - O) \wedge \vec{R} \cdot (O' - O) = 0.$$

Quindi i punti O' soluzioni di (III.5) stanno su un piano normale ad $\vec{M}_n(O)$. Ciò ci suggerisce di rappresentare graficamente la situazione, tracciando un piano π per O e normale ad $\vec{M}_n(O)$. Il fatto che \vec{R} ed \vec{M} siano vettori liberi, ci consente di rappresentarli applicandoli in O . I punti O' stanno su π . Indicato con A quel particolare punto tale che $(A - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_n(O)$ e tale che $(A - O)$, \vec{R} e $\vec{M}_n(O)$



costituiscono una terna destrorsa, tutti i punti che appartengono alla retta per A parallela ad \vec{R} soddisfano la (III.5). Per la ricerca analitica di tale retta, detta *asse centrale*, è sufficiente individuare il punto A , tale che $(A - O) \cdot \vec{R} = 0$ e

$$(A - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_n(O). \quad (\text{III.6})$$

Moltiplicando vettorialmente a destra per \vec{R} la (III.6) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{M}_n(O) \wedge \vec{R} &= [(A - O) \wedge \vec{R}] \wedge \vec{R} \\ &= \underbrace{[(A - O) \cdot \vec{R}] \vec{R}}_{=0} - [\vec{R} \cdot \vec{R}](A - O) \\ &= -R^2(A - O). \end{aligned}$$

Di conseguenza, risulta la seguente equazione per le coordinate del punto A :

$$(A - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_n(O)}{R^2} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2}. \quad (\text{III.7})$$

L'asse centrale è la retta passante per A parallela ad \vec{R} , la cui equazione ha la forma vettoriale

$$(P - A) = \lambda \vec{R},$$

dove $P \equiv (x, y, z)$ è un punto generico dell'asse centrale ed $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ è dato da (III.7). In termini di coordinate, assunto O come origine delle coordinate, siano R_x , R_y e R_z le componenti di \vec{R} che supponiamo tutte diverse da zero, l'equazione dell'asse centrale diventa

$$\frac{x - x_A}{R_x} = \frac{y - y_A}{R_y} = \frac{z - z_A}{R_z}, \quad (\text{III.8})$$

dove per $\vec{M}(O) = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ ed $R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$

$$x_A = \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2}, \quad y_A = \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2}, \quad z_A = \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}.$$

Ricordando che l'asse centrale è il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al vettore risultante, si può anche ricavare l'equazione dell'asse centrale con il cosiddetto *metodo dei momenti*. Si consideri un punto generico P di coordinate (x, y, z) e si determini il momento risultante del sistema dei vettori S rispetto a tale punto:

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n (P_i - P) \wedge \vec{v}_i.$$

Tale espressione è funzione delle coordinate generiche di P . Imporre che il punto P appartenga all'asse centrale equivale ad imporre il parallelismo tra il momento risultante

$$\vec{M}(x, y, z) = M_x(x, y, z)\vec{i} + M_y(x, y, z)\vec{j} + M_z(x, y, z)\vec{k}$$

ed il risultante $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$. In altre parole, se le componenti di \vec{R} sono tutte diverse da zero, l'equazione dell'asse centrale diventa

$$\frac{M_x(x, y, z)}{R_x} = \frac{M_y(x, y, z)}{R_y} = \frac{M_z(x, y, z)}{R_z}.$$

Se $R_z = 0$ ma R_x e R_y sono diverse da zero, risulta

$$\frac{M_x(x, y, z)}{R_x} = \frac{M_y(x, y, z)}{R_y}, \quad M_z(x, y, z) = 0.$$

Esempio III.4 Dato il sistema di vettori applicati $(A, 3\vec{i})$, $(O, 5\vec{j})$, dove $O \equiv (0, 0, 0)$ ed $A = (0, 0, 3)$, determinare l'asse centrale, l'invariante scalare e l'invariante vettoriale.

Il risultante $\vec{R} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Calcoliamo il momento del sistema rispetto al punto A :

$$\vec{M}(A) = (O - A) \wedge 5\vec{j} = (-3\vec{k}) \wedge (5\vec{j}) = 15\vec{i}.$$

L'invariante scalare (che non dipende da A) si ottiene moltiplicando scalarmente per \vec{R} :

$$\vec{M}(A) \cdot \vec{R} = 15\vec{i} \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j}) = 45;$$

l'invariante vettoriale è quindi

$$M_p = \frac{\vec{M}(A) \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} = \frac{45}{34} (3\vec{i} + 5\vec{j}).$$

Inoltre,

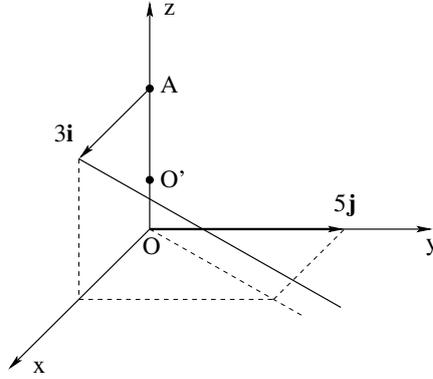
$$\vec{M}(O) = \vec{M}(A) + (A - O) \wedge \vec{R} = 15\vec{i} + 3\vec{k} \wedge (3\vec{i} + 5\vec{j}) = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{i} = 9\vec{j}.$$

Un punto O' dell'asse centrale è individuato da

$$(O' - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2} = \frac{(3\vec{i} + 5\vec{j}) \wedge 9\vec{j}}{34} = \frac{27}{34} \vec{k},$$

quindi $O' = (0, 0, \frac{27}{34})$. L'asse centrale è la retta passante per tale punto e parallela ad \vec{R} , di equazioni:

$$5x - 3y = 0, \quad z = \frac{27}{34}. \quad (\text{III.9})$$



Risolviamo ora lo stesso esercizio con il metodo dei momenti. Sia $P = (x, y, z)$ il punto generico rispetto al quale si determina il momento risultante. Si ha

$$\begin{aligned} \vec{M}(P) &= \vec{M}(x, y, z) = (A - P) \wedge 3\vec{i} + (O - P) \wedge 5\vec{j} \\ &= (-x\vec{i} - y\vec{j} + (3 - z)\vec{k}) \wedge 3\vec{i} + (-x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}) \wedge 5\vec{j} \\ &= \vec{0} + 3y\vec{k} + 3(3 - z)\vec{j} - 5x\vec{k} + \vec{0} + 5z\vec{i} \\ &= 5z\vec{i} + 3(3 - z)\vec{j} + (3y - 5x)\vec{k}. \end{aligned}$$

Imponendo il parallelismo con $\vec{R} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, si ha

$$\frac{5z}{3} = \frac{9 - 3z}{5}, \quad 3y - 5x = 0,$$

da cui si trova la (III.9).

Esempio III.5 Dato il sistema di vettori applicati $(A, \vec{i} + \vec{j})$, $(B, 3\vec{j})$, dove $A \equiv (0, 0, 1)$ ed $B = (0, 0, 2)$, determinare l'asse centrale, l'invariante scalare e l'invariante vettoriale.

Il risultante è $\vec{R} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Il momento del sistema rispetto ad O risulta

$$\vec{M}(O) = \vec{k} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) + 2\vec{k} \wedge 3\vec{j} = \vec{k} \wedge (\vec{i} + 7\vec{j}) = -7\vec{i} + \vec{j}.$$

L'invariante scalare si ottiene moltiplicando scalarmente per \vec{R} :

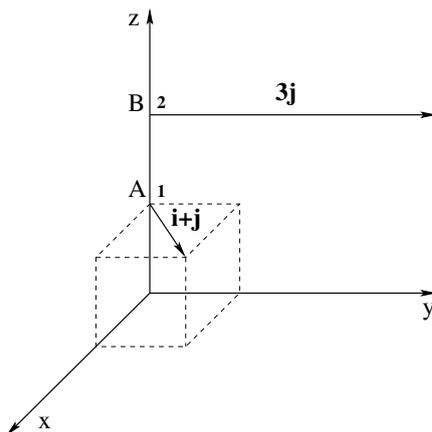
$$\vec{M}(O) \cdot \vec{R} = (-7\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j}) = -7 + 4 = -3.$$

Un punto O' dell'asse centrale è individuato da

$$(O' - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2} = \frac{(\vec{i} + 4\vec{j}) \wedge (-7\vec{i} + \vec{j})}{17} = \frac{29}{17}\vec{k},$$

dunque $O' = (0, 0, \frac{29}{17})$. L'asse centrale è la retta passante per O' e parallela ad \vec{R} , di equazioni:

$$4x - y = 0, \quad z = \frac{29}{17}. \quad (\text{III.10})$$



Utilizziamo ora il metodo dei momenti. Sia $P = (x, y, z)$ un punto generico. Allora il momento rispetto a tale punto è dato da

$$\begin{aligned} \vec{M}(P) &= (A - P) \wedge (\vec{i} + \vec{j}) + (B - P) \wedge (3\vec{j}) \\ &= (-x\vec{i} - y\vec{j} + (1 - z)\vec{k}) \wedge (\vec{i} + \vec{j}) + (-x\vec{i} - y\vec{j} + (2 - z)\vec{k}) \wedge (3\vec{j}) \\ &= (4z - 7)\vec{i} + (1 - z)\vec{j} + (-4x + y)\vec{k}. \end{aligned}$$

Imponendo il parallelismo con $\vec{R} = \vec{i} + 4\vec{j}$ si ottengono le equazioni (III.10).

Esempio III.6 Siano $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_3 = \vec{j}$ tre vettori applicati rispettivamente in $P_1 = (-1, 0, 2)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$; determinarne l'asse centrale.

Poichè $P_1 - P_2 = -2\vec{v}_1$ e $P_3 - P_2 = \vec{v}_3$, le direzioni dei tre vettori sono concorrenti in P_2 . Quindi $\vec{M}(P_2) = \vec{0}$ e l'asse centrale passa per P_2 ed è parallelo al risultante $\vec{R} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, di equazioni:

$$3x - 2y = 3, \quad y + 3z = 0.$$

Esempio III.7 Siano $\vec{v}_1 = -\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_3 = 2\vec{j}$, $\vec{v}_4 = -2\vec{j} - \vec{k}$ quattro vettori applicati rispettivamente in $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 0, 1)$, $P_3 = (1, 2, 1)$, $P_4 = (1, 0, 0)$; determinarne l'asse centrale.

Il risultante $\vec{R} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Il momento rispetto all'origine è

$$\vec{M}(O) = (-\vec{i} - \vec{k}) \wedge \vec{k} + (-2\vec{j} + \vec{k}) \wedge \vec{k} + 2\vec{j} \wedge (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + (-2\vec{j} - \vec{k}) \wedge \vec{i} = \vec{0}.$$

Dunque l'asse centrale passa per l'origine ed è parallelo ad \vec{R} , di equazioni:

$$x + 2y - 5z = 0, \quad x - y + z = 0.$$

Esempio III.8 Siano $\vec{v}_1 = 2\vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_3 = \vec{j}$ tre vettori applicati rispettivamente in $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$; determinarne l'asse centrale.

Risolviamo questo esercizio per il metodo dei momenti. Il risultante è $\vec{R} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Sia $P = (x, y, z)$ un punto generico. Allora

$$\begin{aligned} \vec{M}(P) &= 2\vec{k} \wedge [(1-x)\vec{i} - y\vec{j} + (1-z)\vec{k}] + (\vec{i} + 2\vec{j}) \wedge [(1-x)\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}] \\ &\quad + \vec{j} \wedge [(1-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} - z\vec{k}] \\ &= [2(1-x)\vec{j} + 2y\vec{i}] + [-y\vec{k} + z\vec{j} + 2(x-1)\vec{k} - 2z\vec{i}] + [(x-1)\vec{k} - z\vec{i}] \\ &= (2y - 3z)\vec{i} + (2 - 2x + z)\vec{j} + (3x - y - 3)\vec{k}. \end{aligned}$$

Imponendo il parallelismo ad \vec{R} otteniamo le seguenti equazioni dell'asse centrale:

$$2y - 3z = \frac{1}{3}(2 - 2x + z) = \frac{1}{2}(3x - y - 3).$$

4 Sistemi equivalenti e sistemi equilibrati

Premettiamo la seguente

Definizione III.9 Dati due sistemi di vettori applicati $S = \{(P_i, \vec{v}_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ ed $S' = \{(P'_j, \vec{v}'_j) : j = 1, 2, \dots, m\}$; indicati con \vec{R} , $\vec{M}(O)$ ed \vec{R}' ,

$\vec{M}'(O)$ rispettivamente risultante e momento risultante dei due sistemi rispetto ad un punto fissato O dello spazio, si dice che S e S' sono *equivalenti* se

$$\vec{R} = \vec{R}', \quad \vec{M}(O) = \vec{M}'(O).$$

La definizione non dipende in realtà dalla scelta del punto O . Infatti, se $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}(O) = \vec{M}'(O)$ ed O' è un altro polo, allora

$$\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + (O - O') \wedge \vec{R} = \vec{M}'(O) + (O - O') \wedge \vec{R}' = \vec{M}'(O').$$

Si può passare da un sistema di vettori applicati ad un altro ad esso equivalente, mediante una successione di operazioni che non mutano né il risultante né il momento risultante. Tali operazioni prendono il nome di *operazioni elementari*. Introduciamo le operazioni elementari fondamentali:

- i) aggiunta e soppressione di una coppia di braccio nullo;
- ii) sostituzione di più vettori concorrenti con il loro risultante applicato nel punto di concorrenza e viceversa.

Ad esempio, sappiamo che i vettori possono essere spostati lungo le loro rette di azione, senza cambiare né il risultante, né il momento risultante. Ciò corrisponde all'aggiunta e alla soppressione di opportune coppie di braccio nullo sulle rette di azione dei vettori.

Definizione III.10 Un sistema di vettori applicati si dice *equilibrato*, se

$$\vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{M}(O) = \vec{0}.$$

Segue immediatamente il teorema:

Teorema III.11 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia equilibrato è che esso sia equivalente al solo vettore nullo.*

È interessante a questo punto esaminare quale sia il minor numero di vettori a cui si possa ridurre un qualsiasi sistema di vettori applicati. Così facendo saremo in grado di caratterizzare completamente il campo vettoriale che associa ad ogni punto dello spazio O il momento rispetto ad O del sistema dei vettori applicati.

I sistemi che hanno risultante nullo, come abbiamo visto, hanno l'asse centrale indeterminato. Tali sistemi si riducono al vettore nullo nel caso in cui il sistema sia equilibrato. Se $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$, si riducono ad una qualunque coppia avente momento $\vec{M}(O)$.

I sistemi a risultante non nullo, caratterizzati dall'invariante scalare nullo ($\vec{M}_p = \vec{0}$), si riducono ad un solo vettore: il risultante applicato in un qualsiasi punto dell'asse centrale. Discutiamo ora tre particolari classi di tali sistemi (aventi cioè risultante non nullo e $\vec{M}_p = \vec{0}$):

- a) **Vettori concorrenti:** I vettori hanno le loro rette d'azione concorrenti in uno stesso punto C ; ciascuno di essi può essere traslato lungo la propria retta d'azione fino ad essere applicato in C . Poi, si può sostituire ad ogni coppia di vettori il loro risultante e ripetere questa operazione tante volte fino ad ottenere il risultante dell'intero sistema applicato in C .

Teorema III.12 (di Varignon) *Il momento risultante di un sistema di vettori concorrenti rispetto ad un punto O è uguale al momento rispetto ad O del risultante pensato applicato nel punto di concorrenza.*

- b) **Vettori paralleli:** Dato un sistema di vettori (P_i, \vec{v}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, con $\vec{v}_i = v_i \vec{u}$, \vec{u} versore fissato, allora il risultante \vec{R} è dato da $R\vec{u}$, dove $R = \sum_{i=1}^n v_i$. Il momento di ciascun vettore rispetto ad un punto O dello spazio risulta normale ad \vec{u} , quindi $\vec{M}_p = \vec{0}$. Questa classe di vettori si può pensare come caso limite di vettori concorrenti, in cui il punto di concorrenza è all'infinito.
- c) **Vettori complanari:** Si consideri un sistema di vettori (P_i, \vec{v}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, in un piano π e sia O un qualsiasi punto appartenente al piano. In questo caso i momenti $\vec{M}_i(O)$ di ciascun vettore \vec{v}_i sono normali al piano π . D'altra parte il risultante \vec{R} o è nullo od è parallelo al piano, e quindi $\vec{M}_p = \vec{0}$.

Si osservi che, in questi casi, il sistema ha rispetto ai punti dell'asse centrale il momento risultante nullo, quindi il risultante \vec{R} applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale costituisce un sistema equivalente a quello dato. Si noti che il risultante viene così ad essere applicato in un punto di un elemento intrinseco del sistema, quale in realtà è l'asse centrale.

In generale, *un sistema di vettori applicati*, a risultante non nullo e ad invariante scalare non nullo, è *riducibile al risultante \vec{R} applicato in un punto dell'asse centrale e ad una coppia in un piano normale all'asse centrale di momento pari ad \vec{M}_p* . Tale coppia serve a generare quel componente del campo vettoriale dei momenti parallelo alla direzione di \vec{R} che non varia al variare del polo dei momenti.

Siamo ora in grado di rappresentare il *campo vettoriale dei momenti* di un sistema S su un qualsiasi piano normale alla direzione dell'asse centrale. Ricordando la scomposizione $\vec{M}(O) = \vec{M}_p + \vec{M}_n(O)$, il campo risulta essere simmetrico rispetto all'asse centrale stesso.

Infine arriviamo al seguente schema riepilogativo:

$$\vec{R} = \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{M}(O) = \vec{0} \implies \text{Sistema equilibrato.} \\ \vec{M}(O) \neq \vec{0} \implies \text{Il sistema si riduce ad una coppia di vettori.} \end{cases}$$

$$\vec{R} \neq \vec{0} \implies \begin{cases} \vec{M}_p = \vec{0} \implies \begin{cases} \text{Ad es.: Vettori concorrenti, paralleli,} \\ \text{complanari. Il sistema si riduce a } \vec{R} \\ \text{applicato sull'asse centrale.} \end{cases} \\ \vec{M}_p \neq \vec{0} \implies \begin{cases} \text{Caso generale. Il sistema si riduce a} \\ \vec{R} \text{ applicato sull'asse centrale} \\ \text{più una coppia sul piano ortogonale ad } \vec{R}. \end{cases} \end{cases}$$

5 Vettori paralleli

La classe dei vettori paralleli riveste una particolare importanza nelle applicazioni. Dedichiamo quindi ad essi questo paragrafo.

Prendiamo in considerazione un sistema di vettori (P_i, \vec{f}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, con $\vec{f}_i = f_i \vec{u}$, \vec{u} versore fissato. Allora il risultante \vec{F} è dato da $F\vec{u}$, dove $F = \sum_{i=1}^n f_i$. In questo caso il sistema è riducibile ad un solo vettore o ad una coppia, a seconda che il risultante \vec{F} sia diverso da zero o nullo. Supponendo $\vec{F} \neq \vec{0}$, l'invariante scalare si annulla. Definiamo *centro dei vettori paralleli* il punto C dato da

$$F(C - O) = \sum_{i=1}^n f_i(P_i - O). \quad (\text{III.11})$$

È facile dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.13 *Dato un sistema di vettori paralleli con $F \neq 0$, sia O un punto generico. Allora il punto C definito da (III.11) gode delle seguenti proprietà:*

- i) C non dipende dalla scelta dell'origine O ;*
- ii) C non dipende dalla scelta del versore \vec{u} ;*
- iii) C non cambia se tutte le ampiezze f_i vengono moltiplicate dalla stessa costante diversa da zero;*
- iv) C appartiene all'asse centrale.*

Dimostrazione. i) Sia C' il centro dei vettori paralleli corrispondente al punto di riferimento O' . Allora

$$\begin{aligned} F(C' - O') &= \sum_{i=1}^n f_i(P_i - O') \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(P_i - O) + \sum_{i=1}^n f_i(O - O') \\ &= F(C - O) + F(O - O') = F(C - O'). \end{aligned}$$

Di conseguenza, $C = C'$.

ii) Si vede subito che la (III.11) non contiene il versore \vec{u} .

iii) È chiaro che F viene trasformato in αF se ogni f_i viene trasformato in αf_i . Applicando la (III.11) e utilizzando che $\alpha \neq 0$, si arriva allo stesso centro dei vettori paralleli C .

iv) Calcolando il momento rispetto a C si ha

$$\vec{M}(C) = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \wedge \vec{f}_i = \sum_{i=1}^n f_i(P_i - C) \wedge \vec{u} = F(C - C) \wedge \vec{u} = \vec{0}.$$

Quindi C appartiene all'asse centrale. □

6 Baricentri

Si chiama *baricentro* di un sistema particellare il centro di un qualunque sistemi di vettori paralleli, concordi e di modulo proporzionale alle masse, applicati nei punti del sistema. Se si trovano nei punti P_1, \dots, P_n le masse m_1, \dots, m_n , allora il baricentro G è data da

$$OG = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j OP_j,$$

dove $m = m_1 + \dots + m_n$ è la massa totale del sistema. Se (x_j, y_j, z_j) sono le coordinate cartesiane del punto P_j , allora le coordinate coordinate del baricentro G sono date dalle espressioni

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j x_j, \quad y_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j y_j, \quad z_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j z_j.$$

Nel caso in cui tutte le masse sono uguali ($m_1 = \dots = m_n = (m/n)$), si ha

$$x_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad y_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \quad z_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j.$$

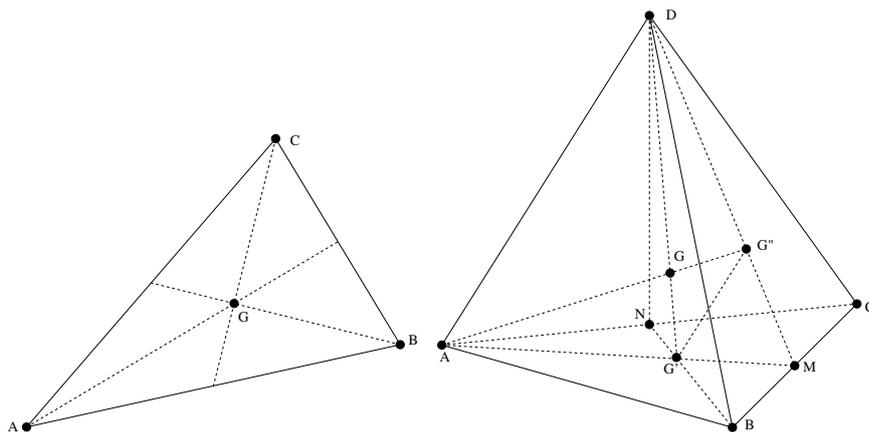


Figura III.1: Pannello sinistro: Baricentro G per tre masse uguali situate nei vertici di un triangolo. Pannello destro: Baricentro G per quattro masse uguali disposte nei vertici di un tetraedro.

Nel caso di tre masse uguali il baricentro (anche detto baricentro del triangolo) coincide con la intersezione delle tre mediane e dista da ognuno dei vertici dei due terzi della lunghezza della mediana uscente da quel vertice. Nel caso di quattro masse uguali il baricentro (anche detto baricentro del tetraedro) si trova sulla congiungente di ognuno dei vertici con il baricentro della faccia opposta e dista dal vertice dei $\frac{3}{4}$ dell'intero segmento congiungente.

Nel caso di un sistema continuo occupante la regione C il baricentro si definisce mediante la densità di massa $\mu(x, y, z)$. In tal caso

$$\begin{aligned}
 x_G &= \frac{1}{m} \iiint_C x \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 y_G &= \frac{1}{m} \iiint_C y \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 z_G &= \frac{1}{m} \iiint_C z \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui la massa è concentrata nel piano xy , il baricentro si definisce mediante la densità di massa $\mu(x, y)$ bidimensionale. In tal caso

$$\begin{aligned}
 x_G &= \frac{1}{m} \iint_C x \mu(x, y) \, dx \, dy, \\
 y_G &= \frac{1}{m} \iint_C y \mu(x, y) \, dx \, dy, \\
 z_G &= 0,
 \end{aligned}$$

dove C è la regione del piano xy occupata dalle masse.

Il prossimo risultato ci consente a calcolare facilmente il baricentro di un sistema per cui la densità è costante a pezzi.

Teorema III.14 *Se si divide il sistema C in N sistemi parziali c_1, \dots, c_N , il suo baricentro coincide con quello dei baricentri G_1, \dots, G_N di c_1, \dots, c_N quando si attribuiscono ad essi le masse $m^{(1)}, \dots, m^{(N)}$ di c_1, \dots, c_N .*

Dimostrazione. Sia $\mu(x, y, z)$ la densità di massa del sistema C . Allora per ogni sistema parziale c_r si ha

$$m^{(r)} = \iiint_{c_r} \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$OG_r = \frac{1}{m^{(r)}} \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz,$$

mentre

$$m = \iiint_C \mu(x, y, z) dx dy dz = m^{(1)} + \dots + m^{(N)},$$

$$OG = \frac{1}{m} \iiint_C (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^N \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^N m^{(r)} OG_r,$$

il quale conclude la dimostrazione. □

Va notato che il baricentro si trova nell'insieme convesso più piccolo che contiene tutte le masse.

Esempio III.15 Calcoliamo il baricentro di un disco di raggio R con il centro situato all'origine per cui la parte superiore ha densità costante μ_1 e quella inferiore ha densità costante μ_2 . Infatti, siano c_1 e c_2 le parti superiore e inferiore. Allora le masse delle due parti sono $m_1 = \frac{1}{2}\pi\mu_1 R^2$ e $m_2 = \frac{1}{2}\pi\mu_2 R^2$. Le coordinate x dei baricentri sono $x_{G_1} = x_{G_2} = 0$. Inoltre,

$$m_1 y_{G_1} = \mu_1 \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \mu_1 \int_{-R}^R dx \frac{1}{2}(R^2 - x^2) = \frac{2}{3}\mu_1 R^2,$$

$$m_2 y_{G_2} = \mu_2 \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 y dy = \mu_2 \int_{-R}^R dx \frac{-1}{2}(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}\mu_2 R^2.$$

Quindi

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3\pi} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

7 Momenti d'inerzia

Si definisce *momento d'inerzia* I di un qualunque sistema particellare rispetto ad una retta r la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle distanze dei loro punti di applicazione dalla retta. Infatti, detta m_j la massa situata nel punto P_j del sistema e δ_j la sua distanza dalla retta r , si ha

$$I = \sum_{j=1}^N m_j \delta_j^2.$$

Nel caso di un sistema continuo C di densità μ si chiama invece momento d'inerzia rispetto alla retta r il corrispondente integrale

$$I = \iiint_C \mu(x, y, z) \delta(x, y, z)^2 dx dy dz,$$

dove δ denota la distanza del punto generico P di C da r .

Il prossimo teorema, quello di Huygens, ci consente a sostituire la retta r da una parallela ad essa quando si calcola il momento d'inerzia.

Teorema III.16 (Huygens) *Il momento d'inerzia di un qualunque sistema materiale C rispetto ad una retta r è uguale a quello rispetto alla parallela r_G ad r condotta per il baricentro di C aumentato dal prodotto della massa totale di C per il quadrato della distanza di r da r_G .*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso bidimensionale, dove le masse si trovano tutte nel piano xy . Adottiamo le notazioni della Figura III.2. Supponiamo che le N masse m_1, \dots, m_N si trovino nei punti P_1, \dots, P_N di coordinate $(x_j, y_j, 0)$, dove $j = 1, 2, \dots, N$. Allora

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^N m_j [x_j^2 + (y_j - d)^2] \\ &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) + d^2 \sum_{j=1}^N m_j - 2d \sum_{j=1}^N m_j y_j \\ &= I_G + md^2 - 2 \frac{d}{m} y_G \\ &= I_G + md^2, \end{aligned}$$

poichè il baricentro si trova nel piano xz e quindi $y_G = 0$. □

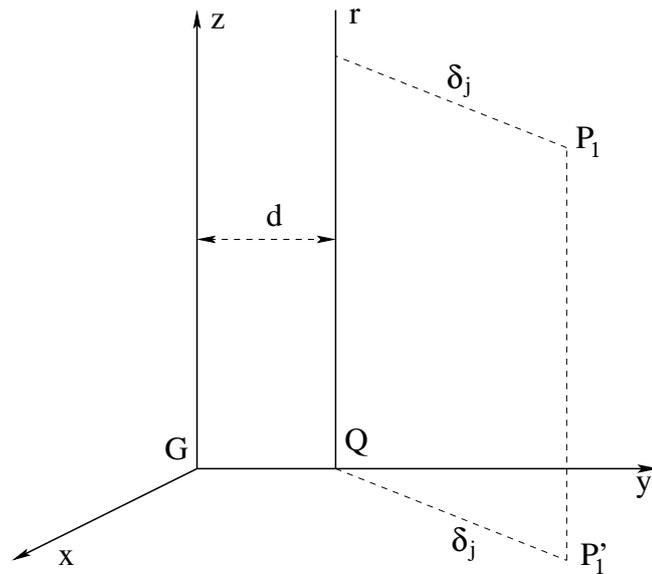


Figura III.2: Illustrazione del Teorema di Huygens sui momenti d'inerzia.

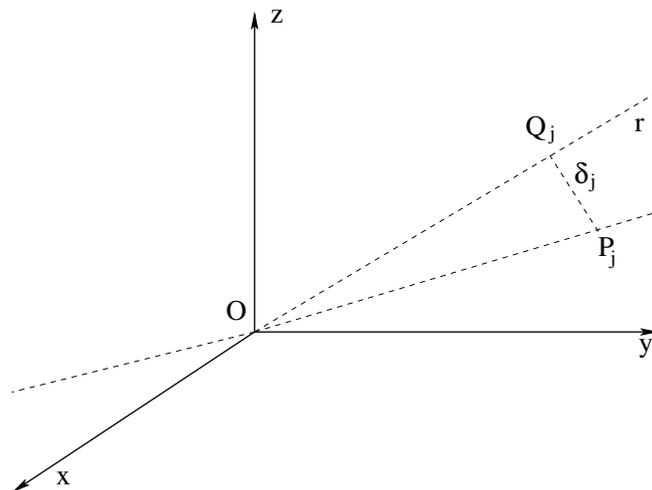


Figura III.3: Illustrazione dei momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti.

Studiamo adesso come varia il momento d'inerzia quando r cambia di direzione passando sempre per un punto O . Siano α , β e γ i cosini direttori di r rispetto alla terna di riferimento che supponiamo di origine O . Sia Q_j la proiezione del generico punto P_j del sistema sulla retta r (vedi la Fig. III.3). Allora

$$\delta_j^2 = |OP_j|^2 - |OQ_j|^2,$$

dove, per $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$|OQ_j| = |\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j|, \quad |OP_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}.$$

Quindi

$$\delta_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - (\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j)^2.$$

Di conseguenza,

$$\delta_j^2 = (y_j^2 + z_j^2)\alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2)\beta^2 + (x_j^2 + y_j^2)\gamma^2 - 2x_j y_j \alpha \beta - 2x_j z_j \alpha \gamma - 2y_j z_j \beta \gamma.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2) & B &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + z_j^2) & C &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2), \\ A' &= \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j, & B' &= \sum_{j=1}^N m_j x_j z_j, & C' &= \sum_{j=1}^N m_j x_j y_j, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^N m_j \delta_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \{ (y_j^2 + z_j^2)\alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2)\beta^2 + (x_j^2 + y_j^2)\gamma^2 \\ &\quad - 2x_j y_j \alpha \beta - 2x_j z_j \alpha \gamma - 2y_j z_j \beta \gamma \} \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta \\ &= (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove la matrice 3×3 è hermitiana e positiva semidefinita.

Nel caso di una distribuzione di masse continua bisogna definire le costanti A , B , C , A' , B' e C' nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \iiint_C \mu (y^2 + z^2) dx dy dz, & B &= \iiint_C \mu (x^2 + z^2) dx dy dz, \\ C &= \iiint_C \mu (x^2 + y^2) dx dy dz, & A' &= \iiint_C \mu yz dx dy dz, \\ B' &= \iiint_C \mu xz dx dy dz, & C' &= \iiint_C \mu xy dx dy dz. \end{aligned}$$

Capitolo IV

Cinematica dei sistemi rigidi

In questo capitolo studiamo la cinematica dei **sistemi rigidi** formati da un numero finito o infinito di punti contenuti in una regione uni, bi o tridimensionale dello spazio ambiente. Ci occupiamo cioè di un qualunque sistema che, durante il moto, conserva inalterate le mutue distanze fra i suoi punti. In altre parole, un sistema di punti è detto rigido se, prendendo i punti a due a due in tutti i modi possibili, la distanza di ogni coppia non varia nel tempo.

1 Equazioni generali del moto

Supponiamo di aver fissato nello spazio ambiente una terna levogira $\Omega\xi\eta\zeta$ (i cui versori indichiamo con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$) e di voler riferire ad esso il moto del nostro sistema rigido S . Consideriamo poi un'altra terna levogira $Oxyz$ (i cui versori denotiamo con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) invariabilmente collegata ad S . Chiamiamo *solidale* la terna $Oxyz$, mentre la terna $\Omega\xi\eta\zeta$ è detta *fissa*. Ogni punto P di S avrà posizione invariata rispetto a $Oxyz$ (cioè le coordinate di P sono costanti rispetto a $Oxyz$) pur muovendosi rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$ (cioè le coordinate di P sono funzioni del tempo rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$). Perciò il moto del generico punto P di S rispetto al sistema fisso è completamente determinato quando si conosca sia la posizione di P rispetto al riferimento solidale (tramite le coordinate costanti x, y, z di P rispetto a $Oxyz$) sia la posizione, istante per istante, del riferimento solidale rispetto a quello fisso (assegnando in funzione del tempo in riferimento a $\Omega\xi\eta\zeta$ l'origine O e i versori \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} della terna solidale).

L'equazione del moto del generico punto P di S è la seguente

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (\text{IV.1})$$

dove $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono definiti in funzione del tempo relativamente alla terna fissa, mentre x, y, z sono costanti rispetto alla terna solidale. Indicate con ξ, η, ζ e con

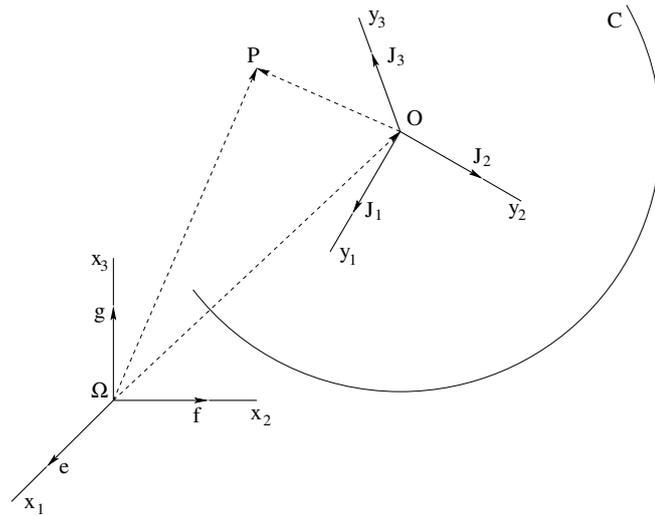


Figura IV.1: Coordinate fisse e solidali al sistema rigido.

α, β, γ le coordinate rispettivamente di P e O rispetto alla terna fissa, introdotti i coseni direttori di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ come

$$\alpha_1 = \vec{i} \cdot \vec{e}, \quad \beta_1 = \vec{i} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_1 = \vec{i} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2a})$$

$$\alpha_2 = \vec{j} \cdot \vec{e}, \quad \beta_2 = \vec{j} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_2 = \vec{j} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2b})$$

$$\alpha_3 = \vec{k} \cdot \vec{e}, \quad \beta_3 = \vec{k} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_3 = \vec{k} \cdot \vec{g}, \quad (\text{IV.2c})$$

si può proiettare l'equazione (IV.1) lungo gli assi della terna fissa, ottenendo

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad (\text{IV.3a})$$

$$\eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \quad (\text{IV.3b})$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \quad (\text{IV.3c})$$

essendo \vec{e}, \vec{f} e \vec{g} i versori della terna fissa. Le (IV.3) sono dette *equazioni generali del moto di un sistema rigido* poichè definiscono in funzione del tempo le coordinate del generico punto P di S rispetto alla terna fissa. Nelle (IV.3) appaiono dodici funzioni del tempo: le coordinate di O (α, β, γ) e i nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ per $i = 1, 2, 3$. È utile però osservare che queste funzioni non sono indipendenti perchè i coseni direttori soddisfano le seguenti relazioni:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \quad (\text{IV.4})$$

$$\alpha_i \alpha_h + \beta_i \beta_h + \gamma_i \gamma_h = 0, \quad \text{per } i \neq h = 1, 2, 3. \quad (\text{IV.5})$$

Quindi le (IV.3) sono completamente individuate a meno di sei funzioni indipendenti e questo si esprimerà¹ dicendo che un sistema rigido è un sistema con sei gradi di libertà.

È importante osservare che le (IV.3) valgono, non solo per ogni punto del sistema rigido S , ma, anche, per ogni altro punto le cui coordinate sono costanti (durante il moto) rispetto alla terna solidale $Oxyz$. Quindi, dal moto di S resta definito un moto dell'intero spazio dei punti rigidamente connessi a S . In altre parole, si può pensare ad uno spazio solidale con il sistema S in moto rispetto allo spazio fisso² e sovrapposto a quest'ultimo. Quando si parla di moto rigido si intende proprio il moto di un intero spazio rigido. A tal proposito va anche rimarcato che un sistema rigido si muove senza dubbio di moto rigido, ma un moto può essere rigido sebbene l'ente fisico a cui esso si riferisce (cioè il sistema di punti S) sia deformabile.

Non è superfluo ribadire che supporremo le funzioni α, β, γ e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ continue e derivabili almeno fino al secondo ordine per tutto l'intervallo di tempo in cui è definito il moto.

2 Prima proprietà caratteristica dei moti rigidi

In un sistema rigido S comunque si prendano due punti P e Q , la loro distanza rimane inalterata durante tutto il moto. Questo fatto viene espresso in formule come

$$(P - Q)^2 = r^2, \quad (\text{IV.6})$$

essendo r costante. Derivando questa equazione rispetto al tempo si trova

$$2(P - Q) \cdot \left(\frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} \right) = 0, \quad (\text{IV.7})$$

o, equivalentemente

$$(P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} = (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{IV.8})$$

La (IV.8) esprime l'uguaglianza delle componenti delle velocità dei punti P e Q secondo la retta congiungente i punti P e Q . La proprietà espressa dalla (IV.8) caratterizza i moti rigidi nel senso seguente. Se il moto è rigido allora necessariamente vale la (IV.8). Viceversa se vale la (IV.8) per ogni coppia di punti allora il moto è rigido. Infatti la (IV.8) è equivalente alla (IV.7) e da quest'ultima si risale alla (IV.6) per integrazione essendo r costante. Riassumendo i moti rigidi sono caratterizzati dalla seguente

¹Si veda il Capitolo VI sui Vincoli.

²per spazio fisso si intende lo spazio solidale alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$

Prima Proprietà Caratteristica: *I moti rigidi di un sistema di punti sono caratterizzati dal fatto che, in ogni istante, le velocità di due punti qualunque del sistema hanno la stessa componente secondo la retta congiungente i due punti.*

3 Moti rigidi particolari

In questa sezione vengono presentati alcuni tipi di moto rigido di grande importanza nelle applicazioni.

3.1 Moti rigidi traslatori

Un moto rigido si dice *traslatorio* se ogni vettore $P_2 - P_1$, determinato da due qualunque punti in moto, rimane costante in modulo, direzione e verso.

Evidentemente se un moto è traslatorio i tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ del riferimento solidale devono restare costanti (per definizione di moto traslatorio). Non è difficile provare che vale anche il viceversa: se in un moto rigido i tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rimangono costanti allora il moto è traslatorio. Infatti, poichè \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} sono costanti per ipotesi, per ogni punto P il vettore $P - O$ rimane costante, e potendosi scrivere $P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$ anche $P_2 - P_1$ si mantiene costante durante il moto e quindi il moto è traslatorio.

Non è difficile ottenere le equazioni cartesiane di un moto traslatorio. A tal fine, supponiamo di aver scelto gli assi della terna solidale in modo che inizialmente siano paralleli e abbiano lo stesso verso degli assi della terna fissa. Trattandosi di un moto traslatorio i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rimangono costanti durante il moto conservando le loro componenti (rispetto agli assi fissi) $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, e le (IV.3) diventano

$$\xi = \alpha + \alpha(t), \tag{IV.9a}$$

$$\eta = \beta + \beta(t), \tag{IV.9b}$$

$$\zeta = \gamma + \gamma(t), \tag{IV.9c}$$

dove α, β, γ denotano le coordinate di un qualunque punto O solidale al sistema mobile.

L'identità che caratterizza i moti traslatori

$$P_2 - P_1 = \vec{c}, \tag{IV.10}$$

dove \vec{c} è un vettore costante, esprime il fatto che il moto di P_2 si può definire come quello dell'estremo di un vettore applicato costante, il cui punto di applicazione coincide istante per istante con P_1 . Dalla (IV.10) discende che *in un moto*

traslatorio le traiettorie dei singoli punti sono uguali e percorse con la stessa legge. In particolare, derivando la (IV.10) si trova

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{dP_1}{dt}. \quad (\text{IV.11})$$

La (IV.11) afferma che in un moto traslatorio tutti i punti del sistema hanno, istante per istante, la stessa velocità.

Viceversa, se in un moto rigido in ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità allora il moto è traslatorio. Infatti, per ipotesi la (IV.11) si mantiene per ogni coppia di punti P_1 e P_2 e, per integrazione, da questa si ottiene la (IV.10) che caratterizza i moti traslatori. Quindi ogni moto traslatorio è caratterizzato da un vettore (che dipende esclusivamente dal tempo) che istante per istante fornisce la velocità comune a ogni punto del sistema. Questo vettore è detto velocità del moto traslatorio e si può eleggere come suo rappresentante la velocità di uno qualunque dei punti del sistema, per esempio quella del punto O .

Derivando la (IV.11) rispetto al tempo si vede subito che in un moto traslatorio tutti i punti hanno istante per istante la stessa accelerazione. Quindi, in un moto traslatorio, è sensato parlare di accelerazione del moto traslatorio e tale vettore è individuato, in un dato istante, dall'accelerazione di un qualunque punto del sistema rigido.

3.2 Moti rigidi rotatori

Un altro notevole esempio di moto rigido è il *moto rotatorio*, cioè il moto in cui rimangono fissi tutti i punti di una retta che si chiama asse di *rotazione*. Per la condizione di rigidità, si ottiene un simile moto fissando due punti di tale asse, che d'ora in avanti chiameremo asse z .

Consideriamo un sistema mobile S animato di moto rotatorio rispetto all'asse z e sia P un punto del sistema non appartenente all'asse di rotazione. Se indichiamo con Q il punto d'intersezione fra la retta passante per P e perpendicolare all'asse z e l'asse z , per l'ipotesi di rigidità la lunghezza del segmento di estremi P e Q non varia e tale segmento rimane sempre perpendicolare all'asse z . In altre parole, un generico punto P del sistema mobile non appartenente all'asse di rotazione si muove sulla circonferenza del piano ortogonale all'asse z il cui centro Q appartiene all'asse z . Quindi, la posizione del sistema mobile sarà individuata quando si conosce, istante per istante, la posizione di un suo punto P non appartenente all'asse. Equivalentemente, la posizione del sistema mobile è individuata qualora sia nota la posizione di un semipiano p uscente dall'asse e solidale con S . Tale posizione di p è assegnata, in ogni istante, tramite l'angolo (o anomalia) $\theta = \widehat{\pi p}$ formato fra un determinato semipiano π uscente dall'asse z e solidale alla terna fissa di riferimento e il semipiano p (anch'esso uscente

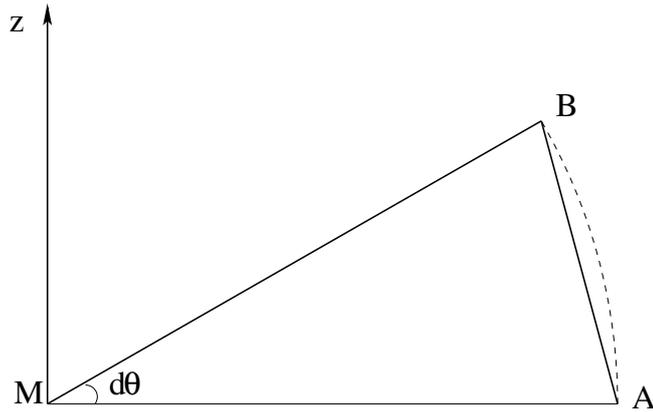


Figura IV.2: Angolo di rotazione.

da z ma solidale alla terna mobile). È conveniente dare un segno all'angolo θ appena introdotto. A tale scopo, orientato ad arbitrio l'asse z , si assume come verso positivo di θ quello destro rispetto all'asse z orientato. L'anomalia è una funzione del tempo $\theta(t)$ che supporremo essere continua e derivabile (almeno fino al secondo ordine). È interessante notare che, sebbene l'intervallo da 0 a 2π sia sufficiente a individuare tutte le possibili posizioni del semipiano p attorno all'asse z , per garantire la sopra accennata continuità della funzione $\theta(t)$ si è soliti ammettere che θ vari anche al di là di questo intervallo.

Osserviamo che, se in un certo intervallo di tempo Δt , l'anomalia del semipiano p varia di $\Delta\theta$, allora tutti i punti del sistema mobile S (in quello stesso intervallo di tempo) descrivono sulle rispettive traiettorie circolari archi di circonferenza il cui angolo al centro è $\Delta\theta$; perciò considerando il seguente limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

possiamo concludere che: *ad ogni istante tutti i punti di un sistema S animato di moto rotatorio hanno la stessa velocità angolare $\dot{\theta}$* . La velocità angolare è una funzione del tempo e il suo segno positivo o negativo indica, ad ogni istante, se il moto rotatorio è destro o sinistro rispetto all'asse orientato.

Quindi per definire un moto rotatorio occorre specificare la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'asse di rotazione z . Per questo motivo, si è soliti introdurre il **vettore velocità angolare** $\vec{\omega}$. Tale vettore è definito come segue: ha per lunghezza il modulo della velocità angolare $\dot{\theta}$ (cioè, $|\dot{\theta}|$), per direzione quella dell'asse di rotazione e per verso quello rispetto al quale il moto appare destro. In base a questa definizione, se \vec{k} rappresenta il versore dell'asse z , possiamo scrivere

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}. \tag{IV.12}$$

Osserviamo che il vettore velocità angolare ha modulo generalmente variabile, ma direzione costante.

L'introduzione del vettore velocità angolare consente di ottenere facilmente la velocità di ogni punto P del sistema rotante S . Infatti, da quanto scritto sopra sappiamo che:

- a. ogni punto P non appartenente all'asse z si muove di moto circolare nel piano ortogonale a tale asse lungo la circonferenza avente centro nel punto Q proiezione ortogonale di P su z ;
- b. Il punto P percorre la circonferenza descritta sopra con velocità angolare $\dot{\theta}$.

Quindi, tenendo conto delle proprietà dei moti circolari, possiamo affermare che la velocità (vettoriale) del punto P ha modulo $\dot{\theta} \overline{QP}$, è, istante per istante, diretta tangenzialmente alla circonferenza di centro Q e raggio QP (nel piano ortogonale all'asse di rotazione) e, per le convenzioni adottate, appare destra rispetto al vettore $\vec{\omega}$. Quindi la velocità del punto P risulta essere simultaneamente ortogonale a $\vec{\omega}$ e al vettore $P - Q$ risultando inoltre destra rispetto a $\vec{\omega}$. Allora, ricordando la definizione di momento rispetto a un punto di un vettore applicato, si osserva facilmente che la velocità \vec{v}_P del punto P è proprio espressa dal momento rispetto a P del vettore $\vec{\omega}$ rispetto a un qualunque punto dell'asse z . Indicato con Ω il generico punto dell'asse z di rotazione, si ha

$$\vec{v}_P = (\Omega - P) \wedge \vec{\omega},$$

e, per le proprietà del prodotto vettoriale,

$$\vec{v}_P(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P(t) - \Omega), \quad (\text{IV.13})$$

dove $\vec{\omega}$ è un vettore di direzione fissa (quella dell'asse di rotazione) e Ω è un qualunque punto (fisso) dell'asse. La (IV.13) esprime quindi la velocità angolare di un generico punto P di un sistema rotante.

Ricavare l'accelerazione del generico punto P di un sistema rotante è ora molto semplice; basta infatti derivare la (IV.13) rispetto al tempo, ottenendo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P(t). \quad (\text{IV.14})$$

Si prova facilmente che la (IV.14) può scriversi, in modo equivalente, nel seguente modo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) - |\vec{\omega}|^2 (P - Q), \quad (\text{IV.15})$$

essendo Q la proiezione del punto P sull'asse di rotazione. Per verificare l'uguaglianza delle formule (IV.14) e (IV.15) basta sostituire la (IV.13) nella (IV.14)

e tener conto della regola del doppio prodotto vettoriale. I dettagli di questi calcoli sono omessi in quanto sono molto simili a quelli che svilupperemo per ricavare la (IV.50).

Osserviamo ora che la (IV.13) caratterizza completamente i moti rotatori. Infatti, se un sistema è animato di moto rotatorio, allora (per quanto mostrato sopra) tutti i punti del sistema hanno velocità espresse tramite la (IV.13). Viceversa, possiamo provare che se tutti i punti del sistema hanno velocità espresse dalle (IV.13) allora il moto è un moto rigido rotatorio. Dimostrare quest'ultima proprietà è abbastanza semplice. Siano infatti P_1 e P_2 due generici punti del sistema tali che le loro velocità siano espresse (conformemente alla (IV.13)) da:

$$\vec{v}_{P_1}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - \Omega) , \quad \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_2(t) - \Omega) .$$

Sottraendo membro a membro dalla prima delle ultime due equazioni la seconda si trova

$$\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t)) , \quad (\text{IV.16})$$

e, tenuto conto che per definizione di prodotto vettoriale $\vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t))$ è perpendicolare a $P_1(t) - P_2(t)$, moltiplicando scalarmente ambo i membri di (IV.16) per $P_1(t) - P_2(t)$, troviamo

$$(\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t)) \cdot (P_1(t) - P_2(t)) = 0$$

che (confronta con (IV.8)) esprime il fatto che il moto è rigido. Per dimostrare che tale moto è anche rotatorio, è sufficiente osservare che dalla (IV.13) segue che tutti i punti P per cui il vettore $P - \Omega$ è parallelo al vettore di direzione fissa $\vec{\omega}$ (cioè i punti della retta parallela ad $\vec{\omega}$ passante per Ω) hanno velocità nulla, cioè sono fissi.

Chiudiamo questa sezione ricavando dalle (IV.3) le equazioni di un moto rotatorio nella forma più semplice possibile. A tal fine supponiamo che l'asse di rotazione coincida con l'asse z della terna mobile e supponiamo che a sua volta quest'asse coincida con l'asse ζ della terna fissa. Fissiamo l'origine comune $O = \Omega$ in un punto qualsiasi dell'asse z e assumiamo come semiassi positivi x e ξ (rispettivamente della terna mobile e di quella fissa) i due semiassi perpendicolari all'asse z e appartenenti rispettivamente al semipiano p e π introdotti in questo paragrafo per definire l'anomalia θ . Allora, per definizione della funzione θ si avrà, $\widehat{\xi}x = \theta(t)$ e $\widehat{\xi}y = \theta(t) + \frac{\pi}{2}$ dove con y si è denotato l'asse y della terna mobile. Ora, usando le (IV.2) si trova subito

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \vec{i} \cdot \vec{e} = \cos \theta, & \beta_1 &= \vec{i} \cdot \vec{f} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, & \gamma_1 &= \vec{i} \cdot \vec{g} = 0, \\ \alpha_2 &= \vec{j} \cdot \vec{e} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta, & \beta_2 &= \vec{j} \cdot \vec{f} = \cos \theta, & \gamma_2 &= \vec{j} \cdot \vec{g} = 0, \\ \alpha_3 &= \vec{k} \cdot \vec{e} = 0, & \beta_3 &= \vec{k} \cdot \vec{f} = 0, & \gamma_3 &= \vec{k} \cdot \vec{g} = 1, \end{aligned}$$

e, poichè $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dalle (IV.3) si trovano le equazioni cercate per il moto rotatorio, cioè

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta - y \sin \theta , \\ \eta = x \sin \theta + y \cos \theta , \\ \zeta = z , \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

essendo θ funzione del tempo. Se si eseguisse la derivata delle (IV.17) si ricaverebbero le proiezioni dell'equazione (IV.13) lungo gli assi della terna fissa.

3.3 Moti rigidi rototraslatori

Nelle due precedenti sezioni abbiamo incontrato due particolari moti rigidi:

1. I moti traslatori che si caratterizzano per il fatto che ad ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità che sarà perciò rappresentata da un vettore $\vec{\tau}$, dipendente esclusivamente dal tempo;
2. I moti rotatori in cui la velocità di ogni punto è espressa da

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) ,$$

essendo Ω un punto fisso (arbitrariamente fissato sull'asse di rotazione) e $\vec{\omega}$ un vettore puramente temporale avente direzione fissa (parallela all'asse di rotazione).

Possiamo allora considerare un moto in cui la velocità del generico punto P sia espressa nel seguente modo:

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) , \quad (\text{IV.18})$$

con $\vec{\tau}$, Ω e $\vec{\omega}$ che soddisfano le stesse proprietà che avevano, rispettivamente, nei moti traslatori e rotatori. Un moto in cui la velocità del generico punto P è data da (IV.18) è necessariamente un moto rigido. Infatti, se P_1 e P_2 sono due punti arbitrari del sistema mobile, allora le loro velocità, conformemente a (IV.18), saranno

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega) , \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_2 - \Omega) .$$

Sottraendo dalla seconda di queste ultime equazioni la prima, si trova

$$\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_2 - P_1) ,$$

e, moltiplicando scalarmente questa equazione per $P_2 - P_1$, otteniamo

$$(\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot (P_1 - P_2) = 0 ,$$

che, in base a quanto mostrato nella Sezione 2, assicura la rigidità del moto.

Il moto rigido così definito si dice *rototraslatorio*. Tale nome evidenzia come, in un moto rototraslatorio, la velocità di un generico punto P è, istante per istante, somma delle due velocità $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$ che al punto P competerebbero in due dati moti rigidi, uno traslatorio e uno rotatorio.

Consideriamo ora un punto O solidale al sistema rigido animato di moto rototraslatorio. Allora per la (IV.18), la velocità di tale punto sarà data da

$$\vec{v}_O = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - O) , \quad (\text{IV.19})$$

e sottraendo questa identità membro a membro dalla (IV.18) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) . \quad (\text{IV.20})$$

La (IV.20) presenta una notevole somiglianza con la (IV.18) da cui differisce per il fatto che il punto O non è un punto fisso ma solidale al sistema. Quindi la decomposizione espressa da (IV.20) è differente dalla (IV.18) usata per definire un moto rototraslatorio. Tuttavia osserviamo che la (IV.19) mette in evidenza che il vettore \vec{v}_O è puramente temporale (come $\vec{\tau}$) e inoltre, il prodotto vettoriale $\vec{\omega} \wedge (P - O)$ è analogo al prodotto vettoriale $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$ solo rispetto a un sistema di riferimento in cui il punto O è fisso e $\vec{\omega}$ ha direzione fissa. Una simile terna è (tenendo conto che la direzione degli assi della terna fissa è invariabile) quella che ha l'origine in O e assi paralleli a quelli della terna fissa e che, quindi, si muove con O di moto traslatorio con velocità \vec{v}_O .

La decomposizione fornita dalla (IV.18) si dice *propria*, mentre la decomposizione espressa dalla (IV.20) si dice *impropria*. Si noti che, al variare della scelta del punto O solidale al sistema, si ottengono per le velocità di uno stesso moto rototraslatorio infinite decomposizioni improprie diverse.

3.4 Moti rigidi elicoidali

Fra i moti rototraslatori rivestono un particolare interesse quelli in cui i vettori $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega}$ sono entrambi costanti rispetto alla terna fissa. Tali moti vengono detti *rototraslatori uniformi* o anche *moti elicoidali*. I moti elicoidali sono caratterizzati dal seguente

Teorema IV.1 *In ogni moto elicoidale esiste, per la velocità del generico punto P del sistema mobile, una decomposizione propria in cui il componente traslatorio è parallelo alla velocità angolare del componente rotatorio.*

Dimostrazione. La velocità del generico punto P in un dato moto elicoidale è data da

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) , \quad (\text{IV.21})$$

con $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega}$ costanti. Escludiamo i casi in cui il moto sia rotatorio ($\vec{\tau} = \vec{0}$), traslatorio ($\vec{\omega} = \vec{0}$) o il caso in cui $\vec{\tau}/\vec{\omega}$ (in quest'ultimo caso non c'è nulla da dimostrare!). Possiamo allora decomporre $\vec{\tau}$ nel componente $\vec{\tau}_p$ secondo la direzione fissa di $\vec{\omega}$ e nel componente $\vec{\tau}_n$ normale alla direzione di $\vec{\omega}$ in modo che si abbia

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_n, \quad (\text{IV.22})$$

dove $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\tau}_n$ sono costanti e $\vec{\tau}_n$ è non nullo. Poichè $\vec{\tau}_n$ e $\vec{\omega}$ sono ortogonali, esiste un vettore \vec{a} , ortogonale a $\vec{\tau}_n$ e $\vec{\omega}$, tale che

$$\vec{\tau}_n = -\vec{\omega} \wedge \vec{a}. \quad (\text{IV.23})$$

Per determinare il vettore \vec{a} basta moltiplicare vettorialmente a sinistra ambo i membri della precedente equazione per $\vec{\omega}$ e, tenendo conto della regola del doppio prodotto vettoriale, si trova

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n = -(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{a})) = -(\vec{\omega} \cdot \vec{a})\vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 \vec{a} = |\vec{\omega}|^2 \vec{a},$$

da cui $\vec{a} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n}{|\vec{\omega}|^2}$. Utilizzando le (IV.21), (IV.22) e (IV.23) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) - \vec{\omega} \wedge \vec{a} = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - (\Omega + \vec{a})),$$

e, poichè \vec{a} è un vettore costante, il punto $\Omega_1 = \Omega + \vec{a}$ risulta fisso. Perciò l'ultima equazione fornisce

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1), \quad (\text{IV.24})$$

e questa equazione fornisce la decomposizione propria di cui il teorema afferma l'esistenza. \square

La decomposizione (IV.24) mostra che, ad eccezione del caso in cui $\vec{\tau}_p = \vec{0}$ (corrispondente a un moto rotatorio), la velocità di un punto P è data dalla somma di due vettori $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$. Il primo di questi due vettori è parallelo a $\vec{\omega}$ mentre il secondo è ortogonale a $\vec{\omega}$. Questo suggerisce di considerare la retta ζ passante per il punto fisso Ω_1 e parallela a $\vec{\omega}$ e il piano π passante per Ω_1 e perpendicolare a $\vec{\omega}$. Infatti, i due addendi $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$ rappresentano le velocità delle proiezioni ortogonali P_ζ e P_1 di P su ζ e π rispettivamente. Poichè $\vec{\tau}_p$ è costante, il moto di P_ζ è rettilineo uniforme. Per quanto riguarda il moto di P_1 , potendosi scrivere

$$P - \Omega_1 = (P - P_1) + (P_1 - \Omega_1),$$

con $P - P_1$ parallelo a $\vec{\omega}$, si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega_1),$$

e tale moto è, quindi, rotatorio uniforme intorno a Ω_1 . Quindi il moto risultante del generico punto P del sistema è elicoidale uniforme (essendo ottenuto componendo un moto rettilineo uniforme e un moto rotatorio uniforme) e l'asse di tale moto è la retta ζ passante per Ω_1 e avente la direzione di $\vec{\omega}$ e $\vec{\tau}_p$.

Chiudiamo questa sottosezione ricavando le equazioni del moto elicoidale. A tale scopo scegliamo come terna mobile $Oxyz$ una qualunque terna solidale con il sistema rigido in modo che l'asse z coincida con la retta ζ e sia orientato come $\vec{\omega}$; si scelga invece come terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ la posizione assunta da $Oxyz$ all'istante $t = 0$.

Si verifica immediatamente che la componente di $\vec{\tau}_p$ lungo $\Omega\zeta$ sarà $\pm|\vec{\tau}_p|$ a seconda che $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega}$ abbiano verso concorde oppure no.

Se ora consideriamo le proiezioni P_ζ e P_1 del generico punto P rispettivamente lungo l'asse ζ e sul piano $\xi\eta$, avremo:

- a. Il punto P_ζ descrive la retta ζ con moto uniforme avente velocità $\pm|\vec{\tau}_p|$. Poichè per $t = 0$ si ha $\zeta = z$, l'equazione del moto è

$$\zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z. \quad (\text{IV.25})$$

- b. Il punto P_1 ruota invece nel piano $\xi\eta$ di moto circolare uniforme intorno a Ω con velocità angolare $\dot{\theta} = \omega$ essendo θ l'anomalia dell'asse mobile Ox rispetto a quello fisso $O\xi$. Chiaramente si ha $\theta = \omega t$. Quindi le equazioni del moto di P_1 si ottengono ponendo $\theta = \omega t$ nelle prime due equazioni di (IV.17), ottenendo:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t. \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Le equazioni cercate si ottengono mettendo insieme le (IV.25) e (IV.26); si perviene così alle equazioni del moto elicoidale:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\ \zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z. \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

4 Moti rigidi generali

In questa sezione vengono studiati i moti rigidi nel caso più generale.

4.1 Formule di Poisson

Per determinare la velocità di un generico punto P di un sistema rigido S occorre derivare la (IV.1) ottenendo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Quindi, per poter esprimere in modo opportuno la velocità del punto P occorre considerare le derivate dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispetto al tempo. Per comodità introduciamo la seguente notazione: indichiamo i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente con $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$. Sussiste il seguente

Teorema IV.2 (*Formule di Poisson*³) *Esiste un unico vettore $\vec{\omega}$ (lo stesso per tutti e tre gli assi x, y e z) tale che*

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{j}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_2, \quad \frac{d\vec{j}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_3. \quad (\text{IV.28})$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in tre parti

1. Costruzione del vettore $\vec{\omega}$ (**il vettore velocità angolare**);
2. Verifica che il vettore velocità angolare soddisfa le (IV.28);
3. Verifica che il vettore $\vec{\omega}$ non dipende dalla particolare terna solidale scelta.

Per costruire il vettore $\vec{\omega}$ procediamo nel seguente modo: Dopo aver moltiplicato vettorialmente a destra la (IV.28) per \vec{j}_1 , troviamo (utilizzando la regola del doppio prodotto vettoriale):

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} \wedge \vec{j}_1 = (\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1) \wedge \vec{j}_1 = (\vec{\omega} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 - (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1) \vec{\omega} = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.29})$$

essendo ω_x la componente del vettore $\vec{\omega}$ rispetto all'asse x . Facendo calcoli molto simili, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{d\vec{j}_2}{dt} \wedge \vec{j}_2 = \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.30a})$$

$$\frac{d\vec{j}_3}{dt} \wedge \vec{j}_3 = \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega}, \quad (\text{IV.30b})$$

³Siméon Denis Poisson nato a Pithiviers nel 1781 morto nel 1840 a Parigi dove insegnò Meccanica Razionale alla École Polytechnique. Le formule riportate in questo teorema si trovano nel suo testo *Traité de Mécanique*.

dove ω_y, ω_z rappresentano le componenti del vettore $\vec{\omega}$ rispetto agli assi y e z , rispettivamente. Quindi, sommando (IV.29), (IV.30a) e (IV.30b), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega} + \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega} + \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega} = \left(\omega_x \vec{j}_1 + \omega_y \vec{j}_2 + \omega_z \vec{j}_3 \right) - 3\vec{\omega} = -2\vec{\omega}.$$

In altre parole, abbiamo ottenuto

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = -2\vec{\omega}$$

e, tenendo conto delle proprietà del prodotto vettoriale, quest'ultima equazione può risciversi come

$$\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il vettore $\vec{\omega}$ è dato da

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right). \quad (\text{IV.31})$$

Abbiamo così costruito il vettore $\vec{\omega}$ di cui il teorema afferma l'esistenza. È utile verificare che il vettore dato dalla (IV.31) soddisfa le (IV.28). Eseguiamo tale verifica solo per la prima delle (IV.28) in quanto la verifica per le altre due equazioni è simile. Ci serviremo delle due proprietà contenute nel seguente

Lemma IV.3 *Abbiamo le seguenti identità:*

$$\frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s = -\frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r, \quad (\text{IV.32a})$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2 \right) \vec{j}_2 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_3 \right) \vec{j}_3. \quad (\text{IV.32b})$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (IV.32a) segue dal fatto che, indicato con δ_{rs} il Delta di Kronecker, si ha $0 = \frac{d(\vec{j}_r \cdot \vec{j}_s)}{dt} = \frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s + \frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r$. La dimostrazione di (IV.32b) è immediata se nella seguente (ben nota!) identità

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{j}_1) \vec{j}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_2) \vec{j}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_3) \vec{j}_3,$$

si pone $\vec{v} = \frac{d\vec{j}_1}{dt}$ e si tiene conto che $\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0$ avendo \vec{j}_1 modulo costante. \square

Possiamo ora facilmente verificare la prima delle (IV.28). Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right) \wedge \vec{j}_1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{j}_1 \wedge \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right) \wedge \vec{j}_1 + \left(\vec{j}_2 \wedge \frac{d\vec{j}_2}{dt} \right) \wedge \vec{j}_1 + \left(\vec{j}_3 \wedge \frac{d\vec{j}_3}{dt} \right) \wedge \vec{j}_1 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 \right) \frac{d\vec{j}_1}{dt} - \left(\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right) \vec{j}_1 + \left(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 \right) \frac{d\vec{j}_2}{dt} - \left(\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt} \right) \vec{j}_2 + \left(\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_1 \right) \frac{d\vec{j}_3}{dt} \right. \\
&\quad \left. - \left(\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt} \right) \vec{j}_3 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} - \left(\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt} \right) \vec{j}_2 - \left(\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt} \right) \vec{j}_3 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \left(\vec{j}_2 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right) \vec{j}_2 + \left(\vec{j}_3 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right) \vec{j}_3 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right] = \frac{d\vec{j}_1}{dt},
\end{aligned}$$

dove nelle ultime due uguaglianze ci si è serviti di (IV.32a) e (IV.32b).

Resta solo da provare che il vettore $\vec{\omega}$ non dipende dalla scelta della terna solidale. A tal fine sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un altro riferimento (ortonormale) solidale e, per assurdo, sia $\vec{\omega}_1 (\neq \vec{\omega})$ il vettore costruito tramite le (IV.31), si avrebbe quindi:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right). \quad (\text{IV.33})$$

Se indichiamo con α_{rs} , ($r, s = 1, 2, 3$) i coseni direttori che i versori \vec{e}_r formano con gli assi \vec{j}_s , cioè esplicitamente

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_1, & \alpha_{12} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_1, & \alpha_{13} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_1, \\
\alpha_{21} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_2, & \alpha_{22} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_2, & \alpha_{23} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_2, \\
\alpha_{31} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_3, & \alpha_{32} &= \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_3, & \alpha_{33} &= \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_3,
\end{aligned}$$

possiamo esprimere i versori \vec{e}_r in funzione di \vec{j}_s facilmente nel seguente modo:

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{j}_1 + \alpha_{12}\vec{j}_2 + \alpha_{13}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{1s}\vec{j}_s, \quad (\text{IV.34})$$

$$\vec{e}_2 = \alpha_{21}\vec{j}_1 + \alpha_{22}\vec{j}_2 + \alpha_{23}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{2s}\vec{j}_s, \quad (\text{IV.35})$$

$$\vec{e}_3 = \alpha_{31}\vec{j}_1 + \alpha_{32}\vec{j}_2 + \alpha_{33}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^3 \alpha_{3s}\vec{j}_s. \quad (\text{IV.36})$$

Usando le (IV.34), si trova

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_1 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \alpha_{1s} \vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{1k} \vec{j}_k \right) \right) + \sum_{s=1}^3 \alpha_{2s} \vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{2k} \vec{j}_k \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^3 \alpha_{3s} \vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{3k} \vec{j}_k \right) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{1s} \alpha_{1k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} + \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{2s} \alpha_{2k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\alpha_{3s} \alpha_{3k}) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} \alpha_{lk} \right) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\}. \tag{IV.37}
\end{aligned}$$

Si è cioè ottenuto

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} \alpha_{lk} \right) \vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} \right\}.$$

A questo punto si può facilmente verificare che il coefficiente del vettore $\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}$ vale 1 se $s = k$, 0 se $s \neq k$, quindi

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right),$$

e la dimostrazione è ora completa. \square

4.2 Derivata temporale di un vettore solidale al sistema rigido

È possibile compattare le formule di Poisson in un'unica formula. A tal fine ricordiamo che \vec{a} rappresenta un vettore solidale al corpo rigido in moto se le componenti a_x , a_y , a_z di tale vettore rispetto alla terna solidale \vec{j}_1 , \vec{j}_2 , \vec{j}_3 non dipendono dal tempo. Quindi, derivando rispetto al tempo l'identità

$$\vec{a} = a_x \vec{j}_1 + a_y \vec{j}_2 + a_z \vec{j}_3$$

e tenendo conto delle formule di Poisson (IV.28), si trova

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dt} &= a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= a_x(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + a_y(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + a_z(\vec{\omega} \wedge \vec{k}) = \vec{\omega} \wedge a_x \vec{i} + \vec{\omega} \wedge a_y \vec{j} + \vec{\omega} \wedge a_z \vec{k} \\ &= \vec{\omega} \wedge (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \vec{\omega} \wedge \vec{a},\end{aligned}$$

in altre parole, abbiamo ricavato

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a}. \quad (\text{IV.38})$$

La (IV.38) contiene come caso particolare le formule di Poisson.

4.3 Derivata temporale di un vettore non solidale al sistema rigido

Come calcolare, più in generale, la derivata di un vettore le cui componenti non rimangono costanti rispetto alla terna solidale? Per rispondere a tale domanda indichiamo con \vec{b} il vettore di cui si vuole calcolare la derivata e siano $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$ le componenti di tale vettore rispetto alla terna solidale. Tenendo conto delle (IV.28) e dei calcoli sviluppati per arrivare alla (IV.38), si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{dt} &= \dot{b}_1(t)\vec{j}_1 + b_1(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{b}_2(t)\vec{j}_2 + b_2(t)\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{b}_3(t)\vec{j}_3 + b_3(t)\frac{d\vec{k}}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge (b_1(t)\vec{i} + b_2(t)\vec{j} + b_3(t)\vec{k}) = \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{b},\end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{b} = \dot{\vec{b}}(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{b}. \quad (\text{IV.39})$$

Un caso particolare e molto significativo della (IV.39) lo si ottiene considerando $\vec{b} = \vec{\omega}$. Si avrebbe

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i = \dot{\vec{\omega}}(t), \quad (\text{IV.40})$$

essendo $\dot{\omega}_i(t)$ le componenti della velocità angolare rispetto agli assi solidali. Questa formula è molto interessante perchè esprime il fatto che il vettore $\vec{\omega}$ ha il medesimo derivato temporale sia rispetto agli assi fissi che rispetto agli assi

mobili. In particolare, se $\vec{\omega}$ ha direzione costante rispetto agli assi solidali avrà direzione costante anche rispetto agli assi fissi. Per dimostrarlo, si indichi con \vec{l} il versore di $\vec{\omega}$. Conviene osservare preliminarmente che \vec{l} ha modulo costante e quindi risulta ortogonale al suo derivato $\frac{d\vec{l}}{dt}$. Dalla (IV.40), scrivendo $\vec{\omega} = \omega\vec{l}$ si ricava inoltre che

$$\frac{d\omega}{dt}\vec{l} + \omega\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\omega}\vec{l} + \omega\dot{\vec{l}},$$

e poichè \vec{l} è ortogonale a $\frac{d\vec{l}}{dt}$ e $\dot{\vec{l}}$, l'equazione di sopra è soddisfatta se e solo se

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{l}}.$$

L'ultima delle due equazioni scritte sopra afferma proprio che se la direzione di \vec{l} è fissa nel riferimento solidale è tale anche in quello fisso e viceversa.

4.4 Componenti della velocità angolare rispetto al riferimento solidale

Per sfruttare bene la (IV.40) sarebbe utile conoscere le componenti del vettore $\vec{\omega}$ rispetto alla terna mobile. Solitamente tali componenti si denotano con p, q, r , si ha cioè $\vec{\omega} = \omega_1\vec{j}_1 + \omega_2\vec{j}_2 + \omega_3\vec{j}_3$. Al fine di ottenere tali formule ripartiamo dall'identità

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_2 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_3.$$

Tenuto conto che $\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0$ e della (IV.32a), quest'ultima equazione si può scrivere come

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_2 - \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_3.$$

Poichè $\vec{j}_3 = -\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1$, $\vec{j}_2 = \vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1$ e $\vec{0} = \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{j}_1}{dt} &= \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1 \\ &= \left[\left(\frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3\right)\vec{j}_1 + \left(\frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1\right)\vec{j}_2 + \left(\frac{\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2\right)\vec{j}_3 \right] \wedge \vec{j}_1. \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Quindi confrontando la prima delle (IV.28) con la (IV.41), si trovano le componenti del vettore della velocità angolare nel riferimento solidale:

$$\omega_1 = \frac{d\vec{j}_2}{dt} \cdot \vec{j}_3, \quad (\text{IV.42})$$

$$\omega_2 = \frac{d\vec{j}_3}{dt} \cdot \vec{j}_1, \quad (\text{IV.43})$$

$$\omega_3 = \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2. \quad (\text{IV.44})$$

5 Velocità e accelerazione in un moto rigido generale

5.1 Velocità in un moto rigido

Se P e O sono due punti di un sistema rigido, il vettore $P - O$ è necessariamente un vettore solidale al corpo rigido e quindi possiamo applicare a tale vettore la formula (IV.38) ottenendo

$$\frac{d(P - O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (P - O).$$

Se si indicano con \vec{v}_P e \vec{v}_O le velocità $\frac{dP}{dt}$ e $\frac{dO}{dt}$ dei punti P e O , si perviene alla seguente

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)}. \quad (\text{IV.45})$$

Quindi abbiamo trovato l'espressione della velocità di un generico punto di un sistema rigido in moto. I vettori \vec{v}_O (rimarchiamo che O rappresenta un qualunque punto solidale del sistema rigido e quindi non necessariamente coincide con l'origine) e $\vec{\omega}$ sono entrambi funzioni del tempo e indipendenti dal punto P .

Viceversa, supponiamo che siano assegnati due vettori \vec{v}_O e $\vec{\omega}$ dipendenti dal tempo e che un sistema si muova in modo tale che la velocità del suo generico punto P sia espressa dalla (IV.45). Allora il sistema è necessariamente rigido. Per provare questa affermazione ragioniamo come segue. Siano P_1 e P_2 due punti del sistema e indichiamo con \vec{v}_1 e \vec{v}_2 le loro velocità. Per le ipotesi fatte possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_1 - O), \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_2 - O). \end{aligned}$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda, si trova

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \wedge (P_1 - P_2)$$

che esprime il fatto che il vettore $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ risulta perpendicolare al vettore $P_1 - P_2$, perciò

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0.$$

Ma questa equazione caratterizza i moti rigidi (confronta con (IV.7)) come si voleva provare.

Possiamo perciò concludere che *l'equazione (IV.45) è caratteristica per le velocità dei punti di un moto rigido*. Quindi, rispetto alla terna fissa, un moto rigido risulta determinato quando si prefissino i vettori puramente temporali \vec{v}_O (essendo O un punto qualsiasi del sistema mobile) e $\vec{\omega}$ che, per questo motivo, sono detti *vettori caratteristici del moto rigido rispetto al polo O* .

Tenendo conto che abbiamo indicato con p, q, r le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna solidale (vedi formule (IV.42)), se denotiamo con u, v, w le componenti di \vec{v}_O , possiamo proiettare la (IV.45) lungo gli assi della terna solidale ottenendo

$$v_x = u + qz - ry, \quad (\text{IV.46})$$

$$v_y = v + rx - pz, \quad (\text{IV.47})$$

$$v_z = w + py - qx. \quad (\text{IV.48})$$

5.2 Accelerazione in un moto rigido

Possiamo ora facilmente determinare **l'accelerazione del generico punto P** di un sistema rigido. A tal fine basta derivare la (IV.45), ottenendo

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O), \quad (\text{IV.49})$$

dove \vec{a}_P e \vec{a}_O rappresentano le accelerazioni di P e O rispettivamente. Per via della (IV.45) possiamo scrivere

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_P - \vec{v}_O) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O)).$$

Consideriamo ora la retta r passante per O e parallela a $\vec{\omega}$ (supponiamo $\vec{\omega} \neq \vec{0}$) e sia Q la proiezione ortogonale di P su r . Ovviamente si ha: $P - O = (P - Q) + (Q - O)$ essendo $Q - O$ parallelo a $\vec{\omega}$ e $P - Q$ ortogonale a $\vec{\omega}$ (si veda la figura). Quindi, usando anche la regola del doppio prodotto vettoriale

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O)) &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - Q)) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (Q - O)) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - Q)) = (\vec{\omega} \cdot (P - Q))\vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2(P - Q) = -|\vec{\omega}|^2(P - Q), \end{aligned}$$

si ha

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P - O)}{dt} = -|\vec{\omega}|^2(P - Q).$$

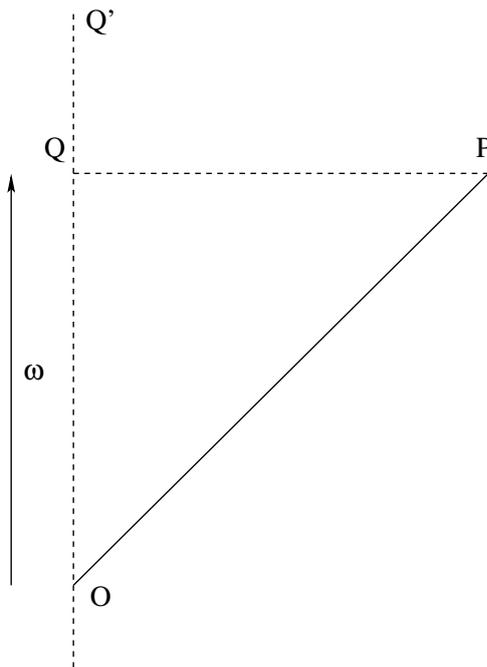


Figura IV.3: Asse di istantanea rotazione.

In definitiva, la (IV.49) può essere riscritta come

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O - |\vec{\omega}|^2(P - Q) + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O), \quad (\text{IV.50})$$

che esprime l'accelerazione del generico punto P (in funzione di quella di un prefissato punto O del sistema e del vettore dipendente dal tempo $\vec{\omega}$). La retta r sopra introdotta è nota come *asse di istantanea rotazione*. Un caso particolare è quello di un moto rigido rotatorio uniforme. In tal caso si annullano \vec{a}_O e $\dot{\vec{\omega}}$ ($\vec{\omega}$ è infatti costante) e la (IV.50) diventa

$$\vec{a}_P = -|\vec{\omega}|^2(P - Q). \quad (\text{IV.51})$$

In tal caso, l'accelerazione si dice *centripeta* essendo diretta verso il centro della circonferenza descritta da P .

6 Atto di moto

6.1 Definizione d atto di moto e asse di moto.

Sebbene il concetto di atto di moto possa essere introdotto per sistemi anche non rigidi, per motivi di semplicità si tratterà solo il caso di sistemi rigidi.

Il moto di un sistema di punti può essere studiato seguendo due approcci diversi:

- a. Approccio *lagrangiano*;
- b. Approccio *euleriano*.

Il punto di vista lagrangiano consiste nell'esprimere i caratteri del moto in funzione della generica particella del sistema e del tempo. Finora abbiamo sempre seguito un approccio di questo tipo. Per esempio, la notazione $\vec{v}_P(t)$ denota la velocità (in funzione del tempo) di una generica particella del sistema. Quindi \vec{v}_P rappresenta la velocità lagrangiana.

Il punto di vista euleriano consiste invece nell'esprimere i caratteri del moto in funzione del tempo e di una fissata posizione A dello spazio ambiente. In questo caso il campo delle velocità del sistema sarà espresso in funzione del tempo e del generico posto A . Più precisamente, la notazione $\vec{e}_A(t)$ rappresenta la velocità in A all'istante t (velocità euleriana). Si può pensare alla velocità euleriana come alla velocità che compete alla particella P del sistema che all'istante t transita per la posizione A . È opportuno rimarcare che al variare dell'istante considerato cambia la particella che transita per A .

Fissato un certo istante temporale t , l'insieme dei vettori applicati $(A, \vec{e}_A(t))$ è detto **atto di moto del sistema all'istante considerato**. Tale terminologia fu introdotta da Maggi⁴. Si tratta di un campo di vettori che precisa la distribuzione istantanea delle velocità nello spazio di riferimento, senza considerare la loro dipendenza dal tempo (infatti l'istante t è fissato). Volendo usare un'immagine pittoresca per descrivere la definizione di atto di moto, possiamo dire che esso corrisponde a una fotografia in cui, per ogni punto A dello spazio ambiente, è rappresentato il vettore velocità della particella solidale al sistema rigido che all'istante del clic passa per A (sempre che tale particella esista!).

Poichè nelle sezioni precedenti abbiamo sempre considerato il punto di vista lagrangiano, è naturale cercare di tradurre le relazioni trovate in termini della formulazione euleriana. In particolare, interessa avere una rappresentazione in forma euleriana della formula fondamentale della cinematica (IV.45). Per ottenere tale rappresentazione, si indichino con A e B le posizioni dello spazio ambiente per cui transitano i punti P e O del sistema rigido nell'istante t fissato. Denotiamo quindi con \vec{e}_A e \vec{e}_B le velocità dei punti P e O nell'istante t . Evidentemente nell'istante t si ha $\vec{e}_A = \vec{v}_P$ e $\vec{e}_B = \vec{v}_O$ e quindi la (IV.45) può

⁴Gian Antonio Maggi nato a Milano nel 1856 e morto nel 1937 a Milano. Insegnò Calcolo nelle Università di Modena e Messina e Meccanica Razionale a Pisa e Milano. Si interessò di Dinamica Analitica, teoria del potenziale, elasticità e elettromagnetismo. Svolse inoltre accurate ricerche sui fondamenti della Meccanica classica e Relativistica.

riscriversi come

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B). \quad (\text{IV.52})$$

L'equazione (IV.52) caratterizza ad ogni istante fissato la distribuzione delle velocità in un qualunque moto rigido.

Analogamente, la proprietà caratteristica dei moti rigidi espressa in termini lagrangiani dall'equazione (IV.8), seguendo un approccio di tipo euleriano diventa

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B), \quad (\text{IV.53})$$

qualunque siano le posizioni A e B .

Studiamo il comportamento dei due vettori caratteristici $\vec{\omega}$ e \vec{e}_B al variare della posizione B .

Prima proprietà: Il vettore $\vec{\omega}$ non dipende da come si sceglie la posizione B .

Per dimostrare tale proprietà iniziamo a verificare che il vettore $\vec{\omega}$ non cambia se, mantenendo fisso B , si riferisce il sistema rigido ad una terna solidale $Bx_1y_1z_1$ avente orientazione diversa dalla "solita" terna solidale $Bxyz$ (confronta anche con la terza parte della dimostrazione delle formole di Poisson). Infatti, se denotassimo con $\vec{\omega}^\dagger$ la velocità angolare calcolata nel sistema di riferimento $Bx_1y_1z_1$, avremo che la velocità in A sarà data da

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B).$$

Ma, relativamente alla prima terna solidale $Bxyz$, tale velocità vale

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B).$$

Per cui, eguagliando le due espressioni trovate per la velocità nel punto A si trova

$$\vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B) = \vec{\omega} \wedge (A - B),$$

che possiamo riscrivere come $(\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega}) \wedge (A - B) = \vec{0}$. Poichè quest'ultima equazione deve essere soddisfatta qualunque sia la posizione di A che si scelga (ovvero per qualunque scelta del vettore $A - B$), deve necessariamente verificarsi che $\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega} = \vec{0}$, ossia $\vec{\omega}^\dagger = \vec{\omega}$. Ora cambiamo la posizione portandola da B a B' . Poichè abbiamo appena dimostrato che la velocità angolare non dipende dall'orientazione della particolare terna solidale con assi concorrenti in B' a cui si riferisce il moto, non è restrittivo considerare la terna avente gli assi paralleli e equiversi alla prima terna solidale $Bxyz$ e origine in B' . Poichè in questo modo non variano i versori fondamentali, non varia in base alla (IV.31) neanche la velocità angolare $\vec{\omega}$.

Seconda proprietà: Il vettore \vec{e}_B varia al variare della posizione B in accordo alla seguente legge:

$$\vec{e}_{B'} = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (B' - B) = \vec{e}_B + (B - B') \wedge \vec{\omega}. \quad (\text{IV.54})$$

La dimostrazione è immediata e discende direttamente dalla legge (IV.52). È utile confrontare la (IV.54) con la (III.2).

Le due proprietà ora ricavate permettono di concludere che: *i vettori caratteristici di un moto rigido $\vec{\omega}$ e \vec{e}_B si comportano, al variare del polo, rispettivamente come il risultante e il momento risultante di un sistema di vettori applicati, al variare del polo.* Perciò tutte le proposizioni ottenute nel Capitolo III e relative alla riduzione dei sistemi di vettori applicati forniscono proposizioni valide relativamente agli atti di moto. Tali proposizioni si ottengono semplicemente sostituendo la parola momento con il termine velocità e la parola risultante \vec{R} con la velocità angolare $\vec{\omega}$.

In particolare, nella Teoria dei Momenti si è definito l'asse centrale di un dato sistema di vettori applicati come il luogo geometrico dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al risultante (supposto diverso dal vettore nullo). In analogia a tale concetto introduciamo l'**asse del moto rigido all'istante t** (o *asse di Mozzi*⁵) come il luogo dei punti di velocità parallela alla velocità angolare $\vec{\omega}$ (supponendo $\vec{\omega} \neq \vec{0}$). Un confronto con l'equazione (III.4) suggerisce inoltre che il componente della velocità nella direzione di ω non dipende dal polo B . Quindi se B è un punto dell'asse di moto si ha $\vec{e}_B = \vec{\tau}/\vec{\omega}$ e, tenendo conto di ciò, la (IV.54) assume la forma

$$\vec{e}_A = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (A - B), \text{ essendo } \vec{\tau}/\vec{\omega} \text{ e } B \text{ indipendente da } A. \quad (\text{IV.55})$$

Questa equazione rende esplicito che il vettore $\vec{\tau}$ rappresenta il componente di \vec{e}_B parallelo ad ω , tale vettore è anche detto *velocità di traslazione del sistema rigido all'istante t* .

Avendo in mente l'espressione lagrangiana stabilita per le velocità nella sezione "Moti rigidi particolari", possiamo interpretare la (IV.55) nel seguente modo: **In un moto rigido, in ogni istante, l'atto di moto è elicoidale**, nel senso che si compone di una traslazione lungo l'asse di moto e di una rotazione attorno allo stesso asse. Quest'ultima affermazione è solitamente nota con il nome di Teorema di Mozzi. Osserviamo che come casi particolari della (IV.55), troviamo i seguenti:

- *Atto di moto traslatorio.* Equivale a prendere $\vec{\omega} = \vec{0}$ nella (IV.55) che quindi fornisce la seguente equazione:

$$\vec{e}_A = \vec{\tau}.$$

⁵Giulio Mozzi nato a Firenze nel 1730 e morto a Firenze nel 1813. Pubblicò un solo lavoro scientifico: quello in cui viene evidenziata l'esistenza dell'asse di moto.

Quindi in un atto di moto traslatorio la velocità non dipende dal posto. Se un moto rigido è traslatorio l'atto di moto è traslatorio in ogni istante.

- *Atto di moto rotatorio.* Equivale alla possibilità di scegliere B in modo che la (IV.55) diventi

$$\vec{e}_A = \vec{\omega} \wedge (A - B),$$

essendo $\vec{\tau} = \vec{0}$ e con B e $\vec{\omega}$ indipendenti da A . Ogni moto rotatorio ha l'atto di moto sempre rotatorio con $\vec{\omega}$ di direzione invariabile.

Dalle definizioni sopra presentate di atto di moto rotatorio e traslatorio segue che: in ogni istante t in cui si annulla $\vec{\omega}$ l'atto di moto è traslatorio, mentre ogni istante in cui si annulla $\vec{\tau}$ corrisponde a un atto di moto rotatorio. Dalla (IV.55), moltiplicando scalarmente per $\vec{\omega}$, otteniamo

$$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} = \pm |\vec{\omega}| |\vec{\tau}| = up + vq + wr,$$

essendo (u, v, w) le componenti di \vec{e}_A e (p, q, r) le componenti della velocità angolare. La quantità $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A$ è detta trinomio invariante. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un atto di moto rigido sia traslatorio o rotatorio è che si annulli, in quel dato istante, il trinomio invariante.*

Non è difficile verificare che l'asse di moto è altresì caratterizzato dal fatto di essere *la retta dei punti di minima velocità*. Infatti ogni punto dell'asse di Mozzi ha, per definizione, velocità in modulo uguale a $|\tau|$. Sia ora A una qualunque posizione del sistema che, nell'istante t , non appartiene all'asse di moto e si indichi con d_A la distanza di tale punto dall'asse. In base alla (IV.55) il modulo della velocità \vec{e}_A è $|\vec{e}_A| = \sqrt{|\tau|^2 + |\omega|^2 d_A^2} \geq |\tau|$ e vale l'uguale se e solo se $d_A = 0$.

6.2 Composizione di atti di moto rigidi

Se i vettori \vec{e}_A e \vec{f}_A rappresentano in un dato istante t , le velocità euleriane nella posizione A di due distinti atti di moti rigidi, il vettore

$$\vec{g}_A = \vec{e}_A + \vec{f}_A$$

caratterizza, nello stesso istante t , il cosiddetto atto di moto composto. È abbastanza semplice provare che l'atto di moto composto di due atti di moto rigido è anche esso un atto di moto rigido. Infatti, poichè per ipotesi \vec{e}_A e \vec{f}_A sono atti di moto rigido, per ciascuno di essi la (IV.53) assicura che

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B), \quad \vec{f}_A \cdot (A - B) = \vec{f}_B \cdot (A - B),$$

qualunque siano le posizioni A e B dello spazio ambiente. Sommando membro a membro queste relazioni si trova

$$\left(\vec{e}_A + \vec{f}_A \right) \cdot (A - B) = \left(\vec{e}_B + \vec{f}_B \right) \cdot (A - B)$$

che comporta

$$\vec{g}_A \cdot (A - B) = \vec{g}_B \cdot (A - B)$$

ossia che l'atto di moto composto è rigido. Per lo studio diretto della composizione degli atti di moto rigidi è necessaria la seguente osservazione. Se \vec{e}_O e $\vec{\omega}_1$ sono i vettori caratteristici del primo atto di moto rigido, mentre \vec{f}_O e $\vec{\omega}_2$ sono i vettori caratteristici del secondo atto di moto rigido in modo che

$$\begin{aligned}\vec{e}_A &= \vec{e}_O + \vec{\omega}_1 \wedge (A - B), \\ \vec{f}_A &= \vec{f}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (A - B)\end{aligned}$$

allora l'atto di moto rigido risultante è dato da

$$\vec{g}_A = \left(\vec{e}_O + \vec{f}_O \right) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge (A - B),$$

cioè i vettori caratteristici, rispetto a una qualunque posizione, di un atto di moto rigido composto si ottengono sommando vettorialmente gli omonimi vettori caratteristici degli atti di moto componenti rispetto alla medesima posizione.

Essenzialmente usando quest'ultima proprietà si perviene ai seguenti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema IV.4 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi concorrenti in un punto è anch'esso rotatorio intorno ad un asse passante per quel punto, ed ha per velocità angolare la somma algebrica delle velocità angolari degli atti di moto componenti.*

Teorema IV.5 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli r e r' e di velocità angolari $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ non opposte, è anch'esso rotatorio intorno ad un asse parallelo a r e r' e giace nel piano della striscia r e r' dividendola in parti inversamente proporzionali a $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ (internamente o esternamente a seconda che $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ siano di verso concorde o meno).*

Teorema IV.6 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli r e r' e di velocità angolari $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ opposte, è puramente traslatorio in direzione ortogonale al piano degli assi r e r' e ha per velocità il momento della coppia delle velocità angolari $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ ciascuna di esse localizzata lungo il rispettivo asse.*

7 Angoli di Eulero

7.1 Definizione degli angoli di Eulero

Nella sezione 1 si è già sottolineato che per determinare la posizione di un sistema rigido rispetto a un'assegnata terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ basta conoscere la posizione

di una terna $Oxyz$ solidale con il sistema rigido rispetto alla terna prefissata $\Omega\xi\eta\zeta$. In particolare, le equazioni (IV.3) mostrano che la posizione della terna $Oxyz$ rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ è nota quando si conoscono le coordinate α, β, γ dell'origine O e i nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Questi ultimi non sono tutti indipendenti fra loro, ma devono soddisfare le sei relazioni espresse dalle (IV.4). Quindi i parametri indipendenti che consentono di specificare la posizione del sistema rispetto alla prefissata terna $\Omega\xi\eta\zeta$ sono sei: le coordinate α, β, γ dell'origine e tre dei nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

È opportuno introdurre dei parametri che consentono una più agevole (e visuale) identificazione della posizione di $Oxyz$ rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$. Poichè il modo più semplice di localizzare l'origine O è tramite le sue coordinate, cerchiamo tre parametri indipendenti atti a individuare in modo univoco l'orientazione della terna Ωxyz (parallela alla terna $Oxyz$ ma con l'origine in Ω) rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Tre parametri che consentono di identificare facilmente l'orientazione di Ωxyz rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$ sono i cosiddetti **angoli di Eulero**. L'introduzione di tali angoli può essere fatta come segue: Supponiamo che i piani xy e $\xi\eta$ non coincidano. In tal caso questi piani si intersecheranno lungo una retta che è perpendicolare sia all'asse z che all'asse ζ (essendo comune a due piani rispettivamente ortogonali all'asse z e all'asse ζ) e quindi al piano da questi individuato. La retta ottenuta come intersezione dei piani xy e $\xi\eta$ e orientata in modo che rispetto ad essa appaia destro l'angolo $\hat{\zeta}z$ delle due rette orientate ζ e z , viene detta linea dei nodi e si denota con N , mentre l'angolo $\hat{\zeta}z$ si chiama *angolo di nutazione* e si denota con θ (per definizione si ha $0 < \theta < \pi$). Si chiama *angolo di precessione* e si denota con ψ l'angolo $\xi\hat{N}$ misurato nel verso destro rispetto a ζ ; infine, l'angolo $\hat{N}x$ misurato nel verso destro rispetto a z si dice *angolo di rotazione propria* e si indica con ϕ . I tre angoli θ, ψ e ϕ definiti in questo modo si chiamano *angoli di Eulero* della terna Ωxyz rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e sono soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leq \psi < 2\pi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

È altresì facile osservare che, assegnati tre valori arbitrari a θ, ψ e ϕ in modo che le limitazioni espresse dalla (IV.56) siano verificate, resta individuata la posizione della terna Ωxyz rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Infatti, nel piano $\xi\eta$ l'angolo ψ consente di tracciare la linea dei nodi N . Quindi nel piano per Ω perpendicolare alla linea dei nodi, l'asse z è individuato come quello che, nel verso destro rispetto a N , forma un angolo θ con l'asse ζ . Inoltre nel piano passante per Ω e perpendicolare all'asse z , l'asse x è localizzato dalla sua anomalia ϕ rispetto alla linea dei nodi (nel verso destro rispetto all'asse z). Infine l'asse y risulta

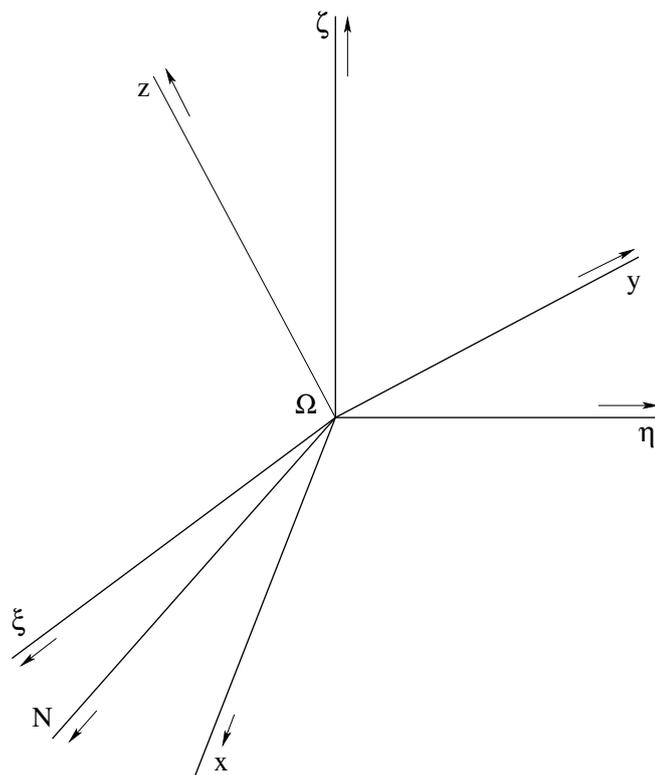


Figura IV.4: Angoli di Eulero.

univocamente individuato come quello che con gli assi x e z forma una terna trirettangola destra.

Rimane da considerare il caso in cui i piani $\xi\eta$ e xy coincidono. In tal caso l'angolo di nutazione θ è uguale a 0 o a π . In tal caso la linea dei nodi è indeterminata e lo stesso si può dire per gli angoli ψ e ϕ . Rimane invece determinata la somma degli angoli ψ e ϕ che in questo caso sono complanari. Infatti, ovunque si pensi tracciata la linea dei nodi, si ha $\psi + \phi = \hat{\xi}x$, e quest'angolo basta a individuare univocamente la terna $Oxyz$ rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$.

Chiudiamo questo paragrafo sottolineando che gli angoli di Eulero di un sistema rigido in moto rispetto ad una terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ sono funzioni determinate del tempo e fino a che il moto è continuo queste funzioni sono funzioni continue.

Possono sorgere difficoltà legate alla continuità del moto come conseguenza delle limitazioni (IV.56). Infatti, può capitare che per rispettare tali limitazioni occorra far saltare bruscamente qualcuno degli angoli di Eulero da un valore estremo all'altro senza che ciò corrisponda a una discontinuità nel moto. Per evitare tali discontinuità artificiali si può rilassare qualcuna delle limitazioni espresse dalle (IV.56): in questo modo si perde però la biunivocità nella

corrispondenza fra i punti dello spazio e terne di valori θ, ψ, ϕ degli angoli di Eulero.

7.2 Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero

Ci occupiamo di trovare le formule che esprimono i coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ in funzione degli angoli di Eulero θ, ψ, ϕ . A tal fine osserviamo che la terna mobile Ωxyz a cui competono tre assegnati angoli di Eulero θ, ψ e ϕ si ottiene a partire dalla terna fissa $\Omega \xi \eta \zeta$ eseguendo tre successive rotazioni destre rispetto al rispettivo asse orientato di rotazione. Le rotazioni da eseguire sono le seguenti:

1. La prima rotazione è una rotazione di angolo ψ intorno all'asse ζ . In questo modo si ottiene la terna $\Omega \xi_1 \eta_1 \zeta$ essendo l'asse ξ_1 proprio la linea dei nodi. In base a (IV.17) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \cos \psi - \eta_1 \sin \psi, \\ \eta = \xi_1 \sin \psi + \eta_1 \cos \psi, \\ \zeta = \zeta. \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

2. La seconda rotazione è una rotazione di angolo θ intorno alla linea dei nodi. In questo modo si ottiene la terna $\Omega \xi_1 y_1 z$ essendo l'asse y_1 la retta del piano ζz tale che $y_1 \hat{z} = \frac{\pi}{2}$ e $\eta_1 \hat{y}_1 = \theta$. Usando le (IV.17) possiamo scrivere le equazioni di tale rotazione:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1, \\ \eta_1 = y_1 \cos \theta - z \sin \theta, \\ \zeta = y_1 \sin \theta + z \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix}.$$

3. L'ultima rotazione è una rotazione di angolo ϕ intorno all'asse z che porta la linea dei nodi a sovrapporsi all'asse x (e l'asse y_1 su y). In questo modo si ottiene la terna Ωxyz . Sfruttando le (IV.17) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi_1 = x \cos \phi - y \sin \phi, \\ y_1 = x \sin \phi + y \cos \phi, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le (IV.58) e (IV.59) nelle (IV.57) e svolgendo semplici prodotti matriciali si trova:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.60})$$

dove $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sono i coseni direttori le cui espressioni sono legate agli angoli di Eulero dalla seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi, \\ \alpha_2 = -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi, \\ \alpha_3 = \sin \theta \sin \psi, \\ \beta_1 = \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi, \\ \beta_2 = -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi, \\ \beta_3 = -\sin \theta \cos \psi, \\ \gamma_1 = \sin \phi \sin \theta, \\ \gamma_2 = \cos \phi \sin \theta, \\ \gamma_3 = \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{IV.61})$$

7.3 Espressione della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero

Ci proponiamo di trovare l'espressione della velocità angolare $\vec{\omega}$ nel moto rigido istantaneo corrispondente al passaggio dalla posizione individuata dagli angoli di Eulero θ, ψ, ϕ a quella individuata dagli angoli $\theta + d\theta, \psi + d\psi, \phi + d\phi$. Dalla definizione degli angoli di Eulero sappiamo che l'incremento $d\theta$ dell'angolo di nutazione θ corrisponde ad una rotazione elementare di angolo $d\theta$ intorno alla

linea dei nodi. Analogamente gli incrementi $d\phi$ e $d\psi$ di ϕ e ψ equivalgono a due rotazioni attorno agli assi z e ζ rispettivamente. Quindi la velocità angolare $\vec{\omega}$ si otterrà nel seguente modo:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{N} + \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{x}, \quad (\text{IV.62})$$

dove $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$ sono i versori rispettivamente della linea dei nodi, dell'asse z e dell'asse ζ .

Per ottenere le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna mobile e a quella fissa in funzione degli angoli di Eulero occorre quindi trovare le componenti dei versori $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$ rispetto ai sistemi di riferimento mobile $Oxyz$ e fisso $\Omega\xi\eta\zeta$. A tale scopo, iniziamo a scrivere la (IV.60) in forma matriciale nella forma (IV.60), dove i coefficienti direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ per $i = 1, 2, 3$ sono i coseni direttori dati dalle (IV.61). Osserviamo che la matrice formata da tali coefficienti è ortogonale (cioè la sua trasposta coincide con l'inversa) e quindi si ha anche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.63})$$

Tenendo conto delle (IV.60) e (IV.63) è ora immediato trovare le componenti di \vec{k}, \vec{x} rispetto alla terna fissa e a quella mobile. Per quanto riguarda il versore \vec{k} le sue componenti rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ sono, in base alla (IV.63), $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, mentre rispetto al riferimento $Oxyz$ tale vettore avrà componenti $(0, 0, 1)$. Invece il versore \vec{x} avrà componenti $(0, 0, 1)$ rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e, in base a (IV.60), $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ rispetto al riferimento mobile $Oxyz$. Per determinare le componenti di \vec{N} rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ basta osservare che, rispetto alla terna $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, tale versore si può rappresentare mediante il vettore applicato in Ω che ha l'estremo libero $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$. Quindi sostituendo nelle (IV.57) i valori $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$, si trovano le componenti rispetto alla terna fissa $(\cos\psi, \sin\psi, 0)$. Analogamente, potendosi rappresentare \vec{N} rispetto alla terna $\Omega\xi_1y_1z$ mediante il vettore applicato in Ω che ha l'estremo libero $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$, sostituendo $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$ nella (IV.59) si ottengono le componenti di \vec{N} rispetto a $Oxyz$ che sono $(\cos\phi, -\sin\phi, 0)$.

Utilizzando quanto sopra trovato nella (IV.62) e indicando con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori della terna mobile e con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori della terna fissa, si ottiene

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1)\vec{i} + (-\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2)\vec{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3)\vec{k}, \quad (\text{IV.64})$$

perciò indicando con p, q e r le componenti di ω rispetto alla terna mobile si ha

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1, \\ q = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2, \\ r = \dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3. \end{cases} \quad (\text{IV.65})$$

Procedendo analogamente si trova

$$\vec{\omega} = \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_3 \right) \vec{e} + \left(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \beta_3 \right) \vec{f} + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \gamma_3 \right) \vec{g}, \quad (\text{IV.66})$$

e denotando le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna fissa con π, ξ, ρ abbiamo

$$\begin{cases} \pi = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \alpha_3, \\ \xi = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \beta_3, \\ \rho = \dot{\psi} + \dot{\phi} \gamma_3. \end{cases} \quad (\text{IV.67})$$

8 Esercizi

ESERCIZIO 1: Un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare

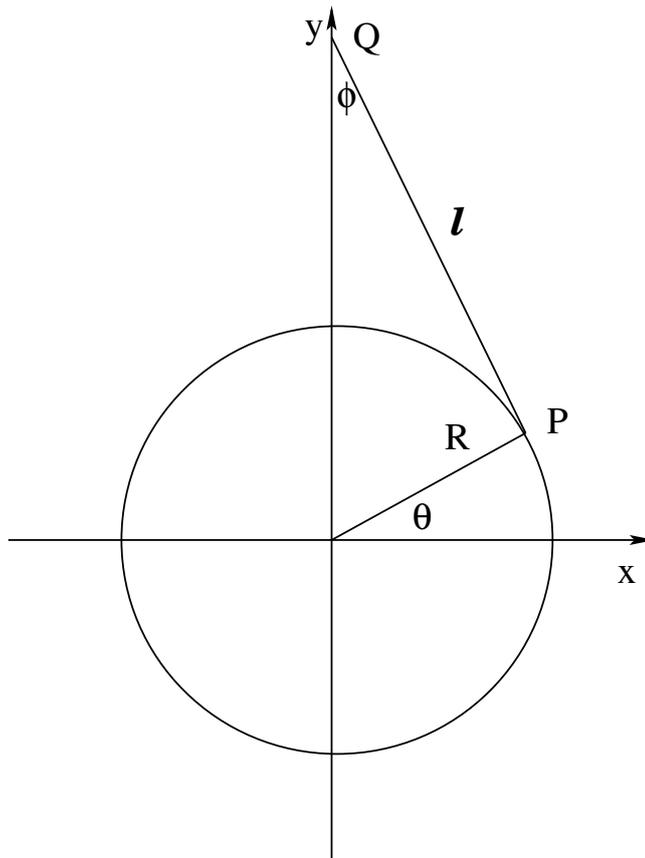
$$\vec{\omega} = \frac{1}{1+t^2} \vec{u},$$

essendo \vec{u} il versore dell'asse di rotazione.

- Calcolare la velocità e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.
- Calcolare l'accelerazione e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.

ESERCIZIO 2: Nel piano cartesiano Oxy si consideri l'asta PQ vincolata con l'estremo P a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro O e raggio R nel senso antiorario, e vincolata con l'estremo Q sul semiasse positivo delle y , essendo ℓ ($\ell > 2R$) la lunghezza dell'asta. Inizialmente (cioè, per $t = 0$) il punto P si trova sul semiasse negativo delle y .

- Calcolare la velocità del punto P .
- Calcolare la velocità del punto Q .
- Calcolare la velocità angolare dell'asta, sapendo che il punto P si muove sulla circonferenza con velocità angolare ω . Suggerimento: Usare la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.
- Determinare la traiettoria del punto medio S dell'asta. Basta trovarla nella forma implicita $F(x, y) = 0$ per un'opportuna funzione F .



SOLUZIONE: a) Sia θ l'angolo polare tale che il punto P ha le coordinate cartesiane

$$x_P = R \cos \theta, \quad y_P = R \sin \theta,$$

dove $\theta = -(\pi/2) + \omega t$. Quindi la velocità del punto P è data dall'espressione $\vec{v}_P = \dot{x}_P \vec{i} + \dot{y}_P \vec{j}$, dove

$$\dot{x}_P = \omega R \cos(\omega t), \quad \dot{y}_P = \omega R \sin(\omega t).$$

b) Essendo ϕ l'angolo tra l'asta e l'asse y tale che $0 \leq \phi \leq \arctan(\frac{R}{\ell}) < \frac{\pi}{4}$, abbiamo l'equazione

$$\ell \sin \phi = R \cos \theta = R \cos(-\frac{1}{2}\pi + \omega t) = R \sin(\omega t).$$

Calcolando la derivata rispetto a t otteniamo

$$\ell \dot{\phi} \cos \phi = \omega R \cos(\omega t),$$

dove $\cos \phi > 0$ e quindi

$$\dot{\phi} = \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Le coordinate del punto Q sono

$$x_Q = 0, \quad y_Q = R \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \omega t\right) + \ell \cos \phi = -R \cos(\omega t) + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Calcolando le derivate rispetto a t arriviamo alla velocità del punto Q , cioè $\vec{v}_Q = \dot{y}_Q \vec{j}$, dove

$$\dot{y}_Q = \omega R \sin(\omega t) - \frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

c) Abbiamo

$$\vec{v}_Q - \vec{v}_P = \vec{\omega}_0 \wedge (PQ),$$

dove $\vec{\omega}_0$ è la velocità angolare dell'asta. In altre parole,

$$\begin{aligned} & -\omega R \cos(\omega t) \vec{i} - \frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{j} = \\ & = \vec{\omega}_0 \wedge \left(-R \sin(\omega t) \vec{i} + \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} \vec{j} \right). \end{aligned}$$

Siccome il moto dell'asta avviene nel piano Oxy , risulta $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$ per un'opportuna velocità angolare scalare ω_0 . Utilizzando $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ e $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$, otteniamo

$$\omega_0 = \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Un altro modo per calcolare la velocità angolare $\vec{\omega}_0$ si basa sulla seguente formula:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_0 &= \frac{(\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \wedge (P - Q)}{\ell^2} \\ &= \frac{1}{\ell^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega R \cos(\omega t) & -\frac{\omega R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} & 0 \\ R \sin(\omega t) & \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{k}. \end{aligned}$$

d) Le coordinate del punto S a metà strada tra P e Q sono

$$x_S = \frac{1}{2} R \sin(\omega t), \quad y_S = -R \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Ora bisogna eliminare la variabile t dalle espressioni per x_S e y_S e arrivare ad un'equazione del tipo $F(x_S, y_S) = 0$. Il trucco è di sfruttare l'uguaglianza

$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$. Infatti,

$$\sin(\omega t) = \frac{2x_S}{R},$$
$$\cos(\omega t) = \frac{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} - 2y_S}{2R} = \frac{\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S}{2R}.$$

Di conseguenza,

$$4[x_S]^2 + \left(\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S\right)^2 = 4R^2.$$

Capitolo V

Moti Relativi

Questo capitolo è organizzato nel seguente modo: in una prima sezione si studia il moto di un punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nella seconda sezione si studia il moto di un sistema rigido in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Infine, nella terza sezione, i principi generali stabiliti sui moti relativi vengono sfruttati per studiare alcuni importanti esempi di moti rigidi (moti rigidi piani e moti di precessione).

1 Generalità

Consideriamo due terne trirettangole levogire $\Omega\xi\eta\zeta$ e $Oxyz$ l'una in moto rispetto all'altra. Convenzionalmente chiamiamo fissa la terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e diciamo mobile la terna $Oxyz$. Sia P un punto mobile rispetto alle due terne. Nel passare dal riferimento fisso a quello mobile le grandezze cinematiche (per esempio la velocità e l'accelerazione) associate al punto P in generale cambiano. Si pone quindi il problema di trovare il legame fra tali grandezze qualora il moto di P sia osservato contemporaneamente da due osservatori (uno solidale alla terna fissa e l'altro solidale a quella mobile). Per risolvere tale problema premettiamo le seguenti definizioni: Si chiama **moto assoluto** il moto del punto P rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, **moto relativo** il moto del punto P rispetto alla terna mobile $Oxyz$ e **moto di trascinamento** il moto rigido della terna mobile rispetto a quella fissa (cioè il moto dello spazio rigido solidale alla terna mobile rispetto alla terna fissa).

Indichiamo con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori degli assi della terna fissa e con $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ i versori degli assi della terna mobile. Siano inoltre $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ le coordinate del punto P rispetto alla terna fissa mentre $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ individuino P rispetto alla terna mobile. La dipendenza dal tempo delle coordinate di P è giustificata dal fatto che esso è in moto rispetto ad entrambe le terne.

Supponiamo che siano date le equazioni del moto relativo di P

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), \quad (\text{V.1})$$

e che sia assegnato il moto di trascinamento della terna mobile rispetto a quella fissa tramite le funzioni $O(t), \vec{j}_1(t), \vec{j}_2(t), \vec{j}_3(t)$. L'equazione del moto assoluto di

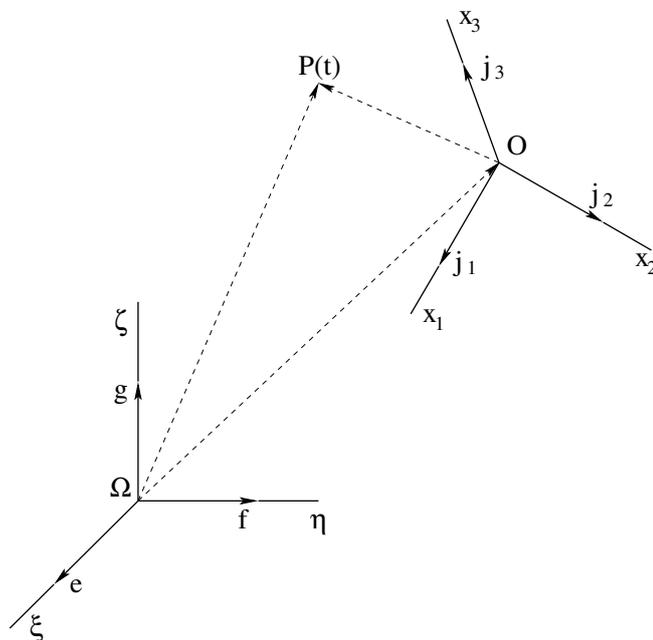


Figura V.1: Moto del punto P rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.

P in forma vettoriale è

$$P = O + x_1 \vec{j}_1 + x_2 \vec{j}_2 + x_3 \vec{j}_3, \quad (\text{V.2})$$

dove x_1, x_2, x_3 sono date dalle (V.1). Le equazioni (V.2) differiscono dalle (IV.1) perchè le coordinate di P non sono costanti rispetto alla base $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$. Proiettando le (V.2) lungo gli assi della terna fissa si ottengono le equazioni del moto assoluto di P

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad (\text{V.3a})$$

$$\eta = \beta + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \quad (\text{V.3b})$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \quad (\text{V.3c})$$

essendo $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) i coseni direttori di $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ introdotti in (IV.2). Le (V.3) sono molto simili alle (IV.3) ma, rispetto ad esse, x_1, x_2, x_3 dipendono

dal tempo (essendo date dalle (V.1)). Quindi, se sono noti il moto relativo di P e quello di trascinamento, è possibile scrivere esplicitamente le equazioni del moto assoluto di P . Viceversa, assegnati il moto assoluto e quello di trascinamento, invertendo le (V.3) si possono scrivere esplicitamente le equazioni del moto relativo di P .

1.1 Legge di composizione delle velocità e teorema di Coriolis

Denotiamo la velocità e l'accelerazione del punto P rispetto alla terna fissa rispettivamente con $\vec{v}^{(a)}$ e $\vec{a}^{(a)}$ (il pedice a sta per "assoluto"), mentre la velocità e l'accelerazione del punto P rispetto alla terna mobile si denoteranno con $\vec{v}^{(r)}$ e $\vec{a}^{(r)}$ (qui il pedice r sta per "relativo"). Infine denoteremo con $\vec{v}^{(t)}$ e $\vec{a}^{(t)}$ la velocità e l'accelerazione di trascinamento. Per velocità di trascinamento si intende la velocità di quel punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile che, nell'istante considerato, è sovrapposto al punto P . In maniera analoga si definisce l'accelerazione di trascinamento.

Per stabilire il legame fra velocità assoluta, relativa e di trascinamento deriviamo la (V.2) rispetto al tempo e otteniamo

$$\frac{d(P - \Omega)}{dt} = \frac{d(O - \Omega)}{dt} + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}. \quad (\text{V.4})$$

Se consideriamo il quadrinomio $\frac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}$ si osserva subito che esso fornisce, istante per istante, la velocità del punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile in moto di trascinamento rispetto alla terna fissa. Infatti, se, a partire da un certo istante $t = t^*$, il punto P si arrestasse nel suo moto rispetto alla terna $Oxyz$ la (V.4) darebbe (a partire dall'istante $t = t^*$) la velocità di un punto le cui componenti sono costanti rispetto alla terna mobile (e quindi tale punto appartiene allo spazio rigido solidale alla terna $Oxyz$). Perciò possiamo porre

$$\vec{v}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \quad (\text{V.5})$$

mentre, per definizione di velocità relativa si ha

$$\vec{v}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i. \quad (\text{V.6})$$

Quindi la (V.4) si può riscrivere come

$$\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}. \quad (\text{V.7})$$

L'equazione (V.7) costituisce il **principio dei moti relativi** che asserisce che *ad ogni istante la velocità assoluta di un punto è la risultante della sua velocità relativa e della sua velocità di trascinamento.*

Per stabilire il legame fra accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento, iniziamo con il derivare la (V.4)

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{j}_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2}. \quad (\text{V.8})$$

Introducendo la cosiddetta **accelerazione complementare** (o *accelerazione centrifuga composta*) come

$$\vec{a}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \quad (\text{V.9})$$

e poichè, per definizione di accelerazione di trascinamento e relativa, si ha

$$\vec{a}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2}, \quad \vec{a}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{j}_i, \quad (\text{V.10})$$

possiamo scrivere la (V.8) nel seguente modo

$$\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)} + \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)}. \quad (\text{V.11})$$

Quest'ultima equazione esprime il teorema di Coriolis: *ad ogni istante l'accelerazione assoluta è la somma vettoriale delle accelerazioni di trascinamento, relativa e complementare.*

L'accelerazione complementare si può scrivere in un modo più significativo se si tiene conto delle formule di Poisson e della definizione di velocità relativa (cioè della (V.6)). Infatti, si trova subito:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(c)} &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i = 2 \sum_{i=1}^3 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \dot{x}_i \vec{j}_i \\ &= 2 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \left(\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{j}_i \right) = 2 \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)}, \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

essendo $\vec{\omega}^{(t)}$ la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa (*velocità angolare di trascinamento*).

Il teorema di Coriolis mette in evidenza come le accelerazioni di un medesimo punto misurate in due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro, siano in generale diverse. Sorge allora spontanea la curiosità di individuare rispetto a quali classi di sistemi di riferimento l'accelerazione rimanga invariata. A tale interrogativo risponde il seguente teorema:

Teorema V.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'accelerazione sia invariante nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro è che tale riferimento si muova di moto traslatorio e uniforme rispetto al primo.*

Dimostrazione. Supponiamo che il moto della terna mobile sia traslatorio uniforme. In tal caso si ha

$$\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}, \quad \frac{d^2 O}{dt^2} = \vec{0}.$$

Quindi, per la (V.10) e la (V.12), l'accelerazione di trascinamento e quella complementare si annullano e la (V.11) fornisce $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$.

Viceversa supponiamo che si abbia $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$ per ogni moto di P . Per la (V.11) deve quindi aversi

$$\vec{0} = \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)} = \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2} + 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)}. \quad (\text{V.13})$$

Si osservi che la velocità di trascinamento dipende solo dalla posizione del punto P e non dal moto relativo di P , perciò $\vec{a}^{(t)}$ e $\vec{a}^{(c)}$ sono ambedue (separatamente) nulle, cioè:

$$\begin{cases} \frac{d^2 O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \vec{j}_i}{dt^2} = \vec{0}, \\ \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)} = \vec{0}. \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

La seconda di queste due equazioni deve essere soddisfatta per ogni moto di P , ovvero per qualunque valore di $\vec{v}^{(r)}$ e, conseguentemente, essa è equivalente alla condizione $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$. Quindi il moto è traslatorio. Inoltre, tenendo conto delle formule di Poisson e della formula fondamentale dei corpi rigidi (eq. (IV.45)), possiamo riscrivere l'espressione dell'accelerazione di trascinamento nel seguente

modo:

$$\begin{aligned}
\vec{a}^{(t)} &= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i)}{dt} \\
&= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{d(\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P - O))}{dt} \\
&= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \left(\dot{\vec{\omega}}^{(t)} \wedge (P - O) \right) + \sum_{i=1}^3 \left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \frac{d}{dt}(P - O) \right). \quad (\text{V.15})
\end{aligned}$$

Se ora si tiene conto della prima delle (V.15) e che $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$, si trova

$$\vec{a}^{(t)} = \frac{d^2O}{dt^2} = \vec{0}, \quad (\text{V.16})$$

e questo assicura che il moto della terma mobile rispetto alla terma fissa oltre che traslatorio è anche uniforme. \square

2 Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili

Nella sezione precedente abbiamo studiato il moto di un singolo punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto reciproco. Consideriamo lo stesso problema qualora anzichè un singolo punto, si ponga l'attenzione su un sistema rigido S in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Ciò che interessa è determinare il legame fra le caratteristiche cinematiche del moto di S ad un fissato istante t rispetto ai due sistemi di riferimento. Anche in questo caso indichiamo con $\Omega\xi\eta\zeta$ la terma fissa e con $Oxyz$ la terma mobile. In base a quanto esposto nel capitolo dedicato ai moti rigidi, per poter individuare l'atto di moto del sistema S (in un fissato istante t) basta conoscere i due vettori caratteristici \vec{v}_Q e $\vec{\omega}$ che rappresentano, rispettivamente, la velocità di un punto Q , comunque prefissato e solidale ad S , e la velocità angolare di S . Poichè nella sezione precedente abbiamo imparato (tramite il teorema dei moti relativi) a esplicitare il legame tra le velocità di un qualunque punto di S rispetto ai due riferimenti in moto reciproco, rimane solo da trovare il legame fra le velocità angolari. A tal fine indichiamo con $\vec{\omega}^{(a)}$ e $\vec{\omega}^{(r)}$ rispettivamente le velocità angolari di S rispetto al riferimento fisso e rispetto al riferimento mobile, mentre si è già introdotta la velocità angolare di trascinamento $\vec{\omega}^{(t)}$ come la velocità angolare del moto rigido della terma $Oxyz$ rispetto alla terma fissa $\Omega\xi\eta\zeta$.

Quindi se P è un punto di S e Q è un prefissato punto solidale a S (cioè dello spazio rigido solidale a S), allora rispetto alla terna fissa si avrà

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q), \quad (\text{V.17})$$

mentre rispetto alla terna mobile si ha

$$\vec{v}_P^{(r)} = \vec{v}_Q^{(r)} + \vec{\omega}^{(r)} \wedge (P - Q). \quad (\text{V.18})$$

Inoltre, se si considerano i punti dello spazio rigido solidale alla terna mobile che nell'istante considerato sono sovrapposti a P e Q , le velocità di trascinamento di questi soddisfano ancora alla (IV.45) e pertanto si ha:

$$\vec{v}_P^{(t)} = \vec{v}_Q^{(t)} + \vec{\omega}^{(t)} \wedge (P - Q). \quad (\text{V.19})$$

Teniamo ora presente che il teorema di moti relativi richiede che $\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}$ e, se sommiamo membro a membro la (IV.45) e la (IV.46), perveniamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \vec{v}_P^{(a)} &= \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} = \left(\vec{v}_Q^{(r)} + \vec{v}_Q^{(t)} \right) + (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q) \\ &= \vec{v}_Q^{(a)} + (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q), \end{aligned}$$

cioè

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + (\vec{\omega}^{(t)} + \vec{\omega}^{(r)}) \wedge (P - Q). \quad (\text{V.20})$$

Confrontando la (V.20) con la (V.17) si ottiene

$$\vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q) = (\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}) \wedge (P - Q),$$

e poichè tale relazione deve valere qualunque siano i punti P e Q che si scelgono, essa conduce alla seguente importante equazione

$$\vec{\omega}^{(a)} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}. \quad (\text{V.21})$$

Questa equazione rappresenta l'analogo per le velocità angolari dell'equazione (V.7). La (V.20) afferma che: *In un moto rigido qualunque la velocità angolare assoluta è, istante per istante, uguale alla somma vettoriale delle velocità angolari relativa e di trascinamento.*

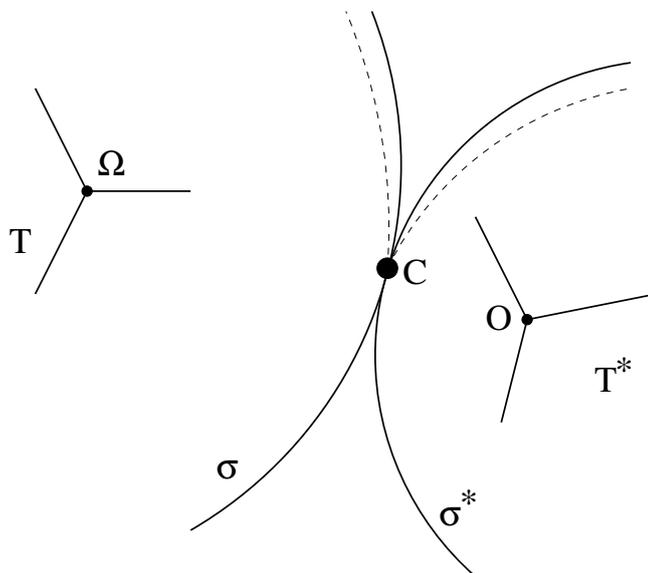
Si verifica facilmente che la velocità angolare rimane invariata nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro solo se il moto del riferimento mobile è traslatorio (cioè se $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$.)

3 Applicazioni ai moti rigidi

In questa sezione discutiamo tre importanti applicazioni della teoria dei moti relativi ai moti rigidi: il rotolamento di due superfici rigide, i moti rigidi piani e i moti di precessione.

3.1 Rotolamento di due superfici rigide

Siano σ^* e σ due superfici rigide delle quali la prima è fissa mentre la seconda si muove mantenendo sempre il contatto con la prima almeno in un punto C (naturalmente, si suppongono soddisfatte tutte le condizioni di regolarità necessarie, in particolare, l'esistenza del piano tangente comune alle due superfici dove questi piani hanno punti in comune). Il moto di σ rispetto a σ^* si dice *moto di rotolamento*. Sia C uno qualunque dei punti di contatto (potrebbe anche essere l'unico, come accade se σ^* e σ sono due superfici sferiche). Esso varia generalmente sia su σ^* che su σ , descrivendo due curve. La velocità di quel punto



di σ che nell'istante considerato si trova sovrapposto a C si chiama *velocità di strisciamento* in C . Evidentemente, essa risulta parallela al piano tangente in C alle due superfici. Infatti, se T^* e T sono due terne rispettivamente solidali a σ^* e σ , la T^* si può considerare come una terna fissa, la T come una terna mobile e interpretare il moto di C su σ^* come moto assoluto, quello su σ come moto relativo. Il moto di trascinamento è il moto di rotolamento di σ su σ^* e, pertanto, la velocità di strisciamento esprime proprio la velocità di trascinamento. Dette $\vec{v}_a^{(C)}$, $\vec{v}_r^{(C)}$ e $\vec{v}_\tau^{(C)}$ le velocità assoluta, relativa e di trascinamento di C , il

principio dei moti relativi dà

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)} + \vec{v}_\tau^{(C)}. \quad (\text{V.22})$$

I vettori $\vec{v}_a^{(C)}$, $\vec{v}_r^{(C)}$, esprimendo velocità di punti che si muovono su σ^* e su σ rispettivamente, sono parallele al piano tangente comune alle due superfici. La (V.22) dimostra, pertanto, che anche il vettore $\vec{v}_\tau^{(C)}$ è ad esso parallelo.

Il moto di σ su σ^* si dice di *puro rotolamento* se la velocità di strisciamento è nulla in ogni punto C . In tal caso si dice che σ rotola senza strisciare su σ^* .

Dato l'annularsi di $\vec{v}_\tau^{(C)}$, è chiaro, in base alla (V.22), che in un moto di puro rotolamento le due traiettorie descritte da C su σ^* e su σ hanno la medesima tangente in C e vengono da C percorse con uguali velocità. Inoltre, risultando nulla la velocità del punto solidale a σ sovrapposto a C , l'atto di moto rigido cui è soggetto σ è ad ogni istante un atto di moto rotatorio intorno a un asse passante per C .

3.2 Moti di precessione

Consideriamo un sistema rigido S avente un punto solidale $O = \Omega$ all'origine comune alla terna fissa T^* e alla terna solidale T avente costantemente la velocità nulla. In tal caso la velocità \vec{v}_P di un qualsiasi punto solidale P diviene

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega). \quad (\text{V.23})$$

Ad ogni istante sia a la retta uscente da Ω e parallela ad $\vec{\omega}$ (supposto non nullo). Tale retta è, in generale, variabile sia nello spazio (cioè, rispetto alla terna fissa T^*), sia nel sistema mobile (cioè, rispetto alla terna solidale T). Passando la a sempre per il punto fisso O , essa descriverà due coni, uno nello spazio ambiente, l'altro nello spazio mobile. Tali coni si chiamano *coni di Poinsot*. Se si considera un qualunque punto P della retta del sistema rigido S a cui in ogni determinato istante la a è sovrapposta, la velocità di P risulta nulla. Infatti, in tal caso $P - \Omega$ risulta parallelo ad $\vec{\omega}$ e quindi $\vec{v}_P = \vec{0}$ (vedi la (V.23)). Dunque abbiamo dimostrato l'esistenza di una retta a , il cosiddetto *asse di moto*, tale che ogni punto di a appartenente allo spazio mobile ha velocità nulla. In generale, la retta a non è solidale allo spazio mobile.¹

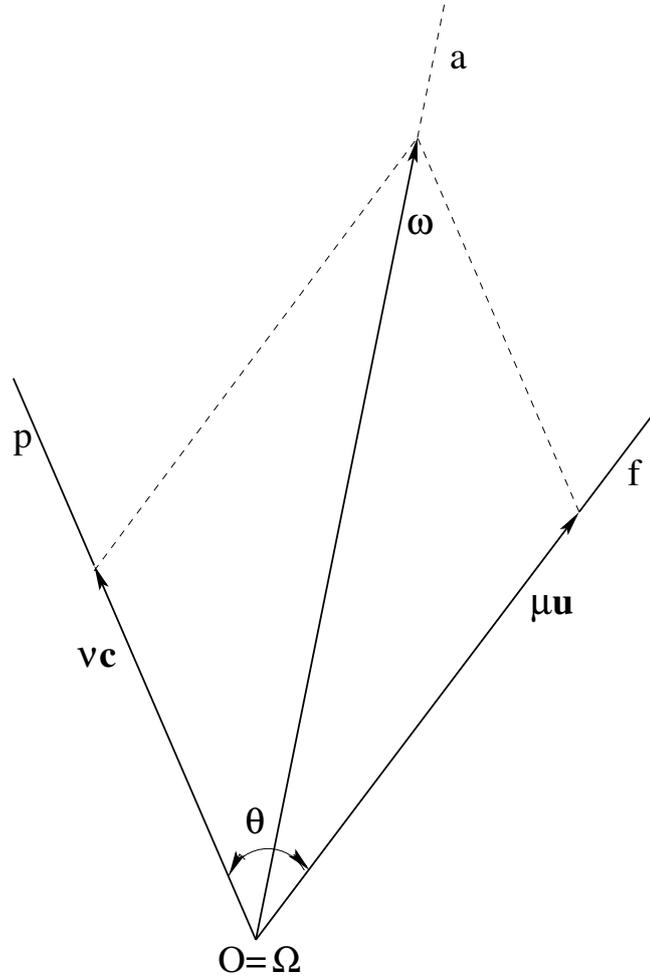
Particolare interesse tra i moti rigidi con un punto fisso rivestono i *moti di precessione*. In tal caso una retta, f , uscente da O e solidale al sistema mobile forma un angolo invariabile, θ , con una retta, p , anch'essa uscente da O ma fissa nello spazio ambiente. La retta f si chiama *asse di figura*, la retta p *asse di precessione*, il punto O *polo della precessione*. La velocità angolare, $\vec{\omega}$, risulta

¹Se lo fosse, il moto sarebbe rotatorio.

somma di due vettori, uno di direzione invariabile nel sistema mobile, l'altro di direzione invariabile nello spazio ambiente. Tale proprietà si esprime con la relazione

$$\vec{\omega} = \mu \vec{u} + \nu \vec{c}, \quad (\text{V.24})$$

dove \vec{u} è un versore solidale al sistema mobile (versore di f) e \vec{c} è un versore invariabile nello spazio ambiente (versore di p , supposto non parallelo a \vec{u}). Le quantità μ e ν si chiamano rispettivamente *velocità di rotazione propria* e *velocità di precessione*. Risultano le seguenti due identità:



$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \cos \theta = \text{costante}, \quad (\text{V.25a})$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = \vec{c} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{u}) - \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{V.25b})$$

Di conseguenza, la velocità angolare $\vec{\omega}$ è parallela al piano dei vettori \vec{u} e \vec{c} . L'annularsi di una delle velocità μ , ν , riduce il moto a un moto rotatorio.

Il moto di precessione si dice *precessione regolare* se ambedue le velocità μ, ν , sono delle costanti. In tal caso, la (V.24) evidenzia come $\vec{\omega}$ sia la somma di due vettori, uno costante nel sistema mobile, l'altro nello spazio ambiente. Poichè in tal caso gli angoli che la retta, a , uscente da O e parallela ad $\vec{\omega}$, forma con f e p sono costanti, si deduce che i due coni di Poinsot sono rotondi.

L'esempio più noto di questo tipo di moto rigido è la precessione dell'asse della Terra. In tal caso, sotto l'ipotesi che la Terra abbia la forma di una sfera, l'origine O coincide con il centro della Terra, l'asse di precessione p è la retta che attualmente passa per i due poli nord e sud, e $\theta \simeq 23,5^\circ$. In prima approssimazione, la precessione è regolare: il periodo di rotazione propria è 24 ore incirca, mentre il periodo di precessione vale 26.000 anni.

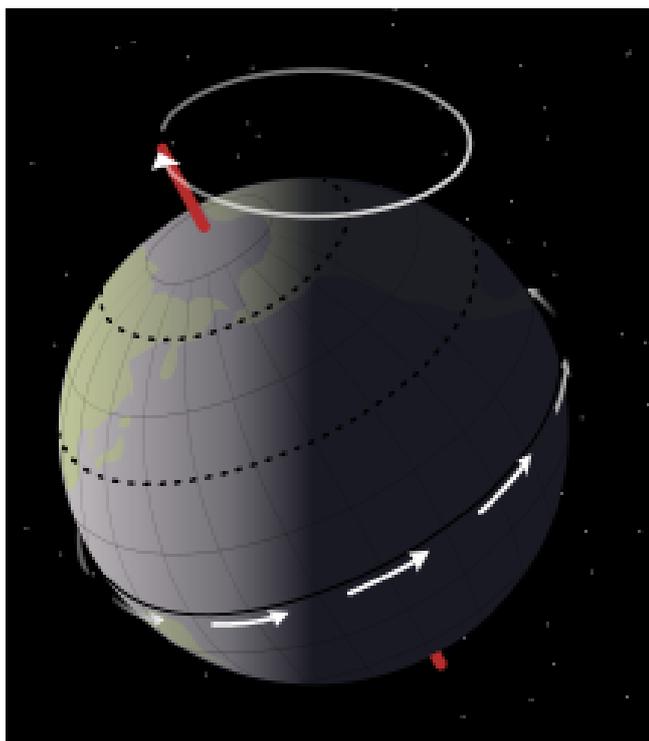


Figura V.2: La precessione dell'asse della Terra. Vedi Wikipedia.

Ritorniamo ora a discutere i coni di Poinsot, dimostrando che il cono mobile, σ , rotola senza strisciare sul cono fisso, σ^* . Sia, infatti, λ^* una qualunque curva tracciata su σ^* e che abbia un'intersezione semplice con ogni generatrice e sia C l'intersezione di λ^* con la generatrice che nell'istante considerato costituisce l'asse di moto. Durante il moto il punto C descrive su σ una curva λ ben determinata. Interpretando il moto di C su σ^* con traiettoria λ^* come moto assoluto e quello su σ con traiettoria λ come moto relativo, il moto di trascinamento

è il moto di σ (cioè, il moto del sistema rigido). Ne segue che la velocità di trascinamento di C è nulla, appartenendo tale punto all'asse di moto in un atto di moto rotatorio.

Per il principio dei moti relativi, si ha, pertanto,

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)}. \quad (\text{V.26})$$

Dalla (V.26) risulta che λ^* e λ hanno la medesima tangente e ciò, essendo quella tangente distinta dalla generatrice comune ai due coni, implica che i due coni abbiano in comune il piano tangente. Inoltre, la velocità di trascinamento nel moto di σ su σ^* è, evidentemente, nulla. Si tratta, pertanto, di un moto di puro rotolamento.

3.3 Moti rigidi piani

Un moto rigido si dice *piano* se è possibile trovare un piano π solidale al corpo che, durante il moto, si mantiene parallelo ed equidistante ad un piano π' solidale all'osservatore. Lo studio del moto rigido piano è riconducibile ad un problema in due dimensioni, ovvero allo studio del moto di una figura rigida piana nel suo piano. Infatti è immediato verificare che tutti i punti di una retta ortogonale al piano π hanno la stessa velocità. Quindi la velocità di ogni punto del corpo è conosciuto se si conosce la velocità della sua proiezione sul piano π , ovvero la velocità della sezione del corpo con il piano π .

Considerato un punto qualunque P del corpo distinto dalla sua proiezione P' sul piano π' , affinché il moto sia rigido piano, il vettore PP' deve risultare costante. Infatti si può scrivere:

$$PP' = \|PP'\|\vec{u}, \quad (\text{V.27})$$

dove \vec{u} è il versore normale al piano π , concorde con PP' . Allora derivando rispetto al tempo abbiamo:

$$\frac{d(PP')}{dt} = \frac{d\|PP'\|}{dt}\vec{u} + \|PP'\|\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Ma $(d\|PP'\|/dt) = 0$ per la condizione di rigidità e quindi $(d\vec{u}/dt) = \vec{0}$. Quest'ultimo segue anche direttamente dal fatto che il piano π si mantiene sempre parallelo a se stesso durante il moto e quindi il versore \vec{u} ad esso normale è costante. Di conseguenza:

$$\frac{d(PP')}{dt} = \frac{dP'}{dt} - \frac{dP}{dt} = \vec{0},$$

oppure:

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_P, \quad (\text{V.28})$$

qualunque sia il punto P' appartenente alla retta passante per P e normale al piano π . Dunque il moto della sezione del corpo con il piano π determina completamente il moto del corpo.

Dalla legge di distribuzione delle velocità (IV.45) e dalla (V.28) otteniamo le seguenti informazioni sulla velocità angolare:

$$\vec{\omega} \wedge PP' = \vec{0}. \quad (\text{V.29})$$

Essendo per ipotesi $P \neq P'$, per la velocità angolare nel moto rigido piano rimangono le due seguenti possibilità:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$ nel qual caso l'atto di moto risulta traslatorio;
- $\vec{\omega}$ è parallelo a PP' , cioè $\vec{\omega}$ è parallelo al versore \vec{u} al piano π . In questo caso l'asse di Mozzi esiste ed è normale al piano π . Ricordiamo che la velocità di ogni punto dell'asse di Mozzi è parallela a \vec{u} .

Non abbiamo ancora utilizzato l'informazione relativa all'invariabilità della distanza fra i piani paralleli π e π' : questa comporta che la componente della velocità normale a questi piani deve essere nulla. Infatti considerando un punto A appartenente alla sezione del corpo con il piano π e la sua proiezione A' sul piano π' , la distanza tra i due piani si può esprimere come:

$$h = \vec{u} \cdot A'A. \quad (\text{V.30})$$

La sua invariabilità equivale a richiedere

$$\frac{dh}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{v}_A = \tau = 0 \quad (\text{V.31})$$

dal momento che la componente della velocità di A' lungo \vec{u} è necessariamente nulla, essendo A' , per definizione, un punto del piano fisso π' . Ora la (V.31) ci informa che la velocità dei punti del corpo o sono nulle o sono parallele al piano π , in quanto risultano ortogonali al versore normale a π . Questo significa anche che le velocità dei punti della sezione del corpo con il piano π costituiscono un sistema di vettori piani il cui piano è π e quindi la sezione piana si muove nel suo piano, senza mai uscire da esso.

Si conclude allora, che in un moto rigido piano l'atto di moto o è traslatorio, e allora tutti i piani hanno velocità uguali e parallele al piano π , oppure è rotatorio con le velocità dei punti sempre parallele al piano π . Il piano π si dice allora *piano del moto*. In questo caso il vettore velocità angolare è sempre normale al piano del moto.

Esaminiamo ora il caso in cui $\vec{\omega} \neq \vec{0}$; allora l'atto di moto è rotatorio e l'asse di Mozzi è un *asse di istantanea rotazione*, essendo una retta i cui punti hanno velocità nulla, ed è ortogonale al piano del moto. Definiamo ora *centro di istantanea rotazione* il punto di intersezione dell'asse di istantanea rotazione con il piano di moto. In un atto di moto rigido piano, in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro di istantanea rotazione, è quel punto della sezione del corpo che, nell'istante considerato, ha velocità nulla. La velocità di un qualsiasi punto P del corpo è data da:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge CP, \quad (\text{V.32})$$

essendo C il centro di istantanea rotazione.

Per definizione di centro di istantanea rotazione si ha $\vec{v}_C = \vec{0}$, mentre il teorema di Poisson implica che

$$\vec{v}_C = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \Omega C.$$

Quindi

$$\vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge \Omega C = \vec{0}, \quad (\text{V.33})$$

essendo Ω un punto qualunque del corpo, scelto come origine di un sistema di assi solidali nel piano del moto. Moltiplicando vettorialmente per $\vec{\omega}$ a sinistra la (V.33) riusciamo ad isolare ΩC :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \omega \wedge \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \Omega C) \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega + (\vec{\omega} \cdot \Omega C)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\Omega C \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega - \omega^2 \Omega C, \end{aligned}$$

essendo $\vec{\omega} \cdot \Omega C = \vec{0}$. Essendo l'atto di moto rotatorio, cioè $\omega \neq 0$, otteniamo

$$\Omega C = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_\Omega}{\omega^2}. \quad (\text{V.34})$$

Capitolo VI

Vincoli

In questo capitolo vengono introdotti alcuni dei concetti più importanti per lo sviluppo della Meccanica, e cioè quelli di *vincolo*, *coordinate lagrangiane* e *grado di libertà*.

1 Vincoli e loro classificazione

Nello studio della Meccanica molto spesso ci si imbatte in sistemi materiali (continui e discreti) vincolati, cioè il cui movimento è ostacolato. Per vincolo si intende ogni dispositivo che limita la libertà di movimento dei punti di un sistema.

Ci soffermiamo sulla rappresentazione analitica dei vincoli, cioè sulla loro descrizione mediante opportune equazioni e/o disequazioni. Infatti una prima classificazione dei vincoli viene fatta tenendo conto della natura delle equazioni che li rappresentano.

Per prima cosa occorre distinguere fra vincoli *di posizione* e vincoli di *mobilità*. I vincoli sono detti di posizione se le equazioni che li rappresentano coinvolgono le coordinate dei punti del sistema ma non le loro velocità. Invece si ha un vincolo di mobilità se le equazioni del vincolo tengono conto sia della posizione dei punti che delle loro velocità.

Sofferamoci inizialmente sui vincoli di posizione. Essi possono ulteriormente essere classificati in:

- vincoli bilaterali e vincoli unilaterali
- vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo
- vincoli interni e vincoli esterni

In particolare un vincolo viene detto di posizione e bilaterale se esso è rappresentato da un'equazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_N; t) = 0, \quad (\text{VI.1})$$

essendo f una funzione degli N punti del sistema ed, eventualmente, del tempo t . Discutiamo alcuni semplici esempi di tale tipo di vincolo.

Punto materiale P vincolato a stare su una superficie. Supponiamo che l'equazione della superficie su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad (\text{VI.2})$$

dove (x, y, z) denotano le coordinate del punto P , mentre la dipendenza dal tempo t evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.2) rappresenta un vincolo del tipo (VI.1) e quindi di posizione e bilaterale. Per esempio, il punto $P(x, y, 1 - x^2 - y^2)$ è vincolato a stare sulla superficie sferica di centro l'origine e raggio unitario, in altre parole il vincolo è rappresentato dall'equazione di tale sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Punto materiale P vincolato a stare su una curva. Supponiamo che l'equazione della curva su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$\begin{cases} f(x, y, z; t) = 0, \\ g(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

dove (x, y, z) denotano le coordinate del punto P . In tal caso, ciascuna delle due equazioni (indipendenti) rappresenta un vincolo di posizione bilaterale. Per esempio, il punto $P(x, 1 - y^2, 0)$ è vincolato a stare sulla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario del piano xy . Tale vincolo è di posizione e bilaterale perchè le coordinate del punto P soddisfano le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Sistema rigido (vincolo di rigidità). Come già discusso in un precedente capitolo, un sistema (continuo o discreto) si dice rigido se la distanza fra due punti qualunque del sistema è costante al trascorrere del tempo. Per semplicità, supponiamo che il sistema sia formato da un numero finito di punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$ (con $i = 1, 2, \dots, N$). Il vincolo di rigidità sarà allora espresso mediante le equazioni (ciascuna del tipo (VI.1))

$$d(P_i, P_j) = \text{cost.} \quad \text{per } i, j = 1, 2, \dots, N, \text{ e } i \neq j, \quad (\text{VI.4})$$

dove con $d(P_i, P_j)$ si è denotata la distanza fra i punti P_i e P_j . Se ai punti P_i si aggiunge un altro punto P , questo soddisfa il vincolo di rigidità se $d(P, P_i) = \text{cost.}$ con $i = 1, 2, \dots, N$. In particolare, questo significa aggiungere N vincoli a quelli già presenti.

Un vincolo viene detto di posizione e unilaterale se esso è rappresentato da una disequazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \dots, P_N; t) \geq 0. \quad (\text{VI.5})$$

Le configurazioni per cui la (VI.5) è soddisfatta come uguaglianza si dicono di *confine*, mentre quelle per cui la (VI.5) è verificata come disuguaglianza sono dette *ordinarie*. Consideriamo alcuni esempi di tale tipo di vincolo.

Punto materiale P appoggiato a una superficie. Supponiamo che un punto P sia costretto a rimanere sempre dalla stessa parte di una superficie senza poterla attraversare. Si dice allora che tale punto è appoggiato alla superficie. Se l'equazione della superficie su cui il punto è appoggiato, è $f(x, y, z; t) = 0$, allora le coordinate del punto $P(x_P, y_P, z_P)$ dovranno soddisfare la relazione

$$f(x_P, y_P, z_P; t) \geq 0, \quad (\text{VI.6})$$

dove la dipendenza dal tempo t evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.6) rappresenta un vincolo del tipo (VI.5) e quindi di posizione e unilaterale. Un esempio di punto appoggiato ad una superficie è rappresentato da un punto costretto a restare all'esterno della superficie sferica. In tal caso le sue coordinate x, y, z dovranno soddisfare la disequazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0.$$

In particolare, le configurazioni di confine sono quelle in cui le coordinate del punto P soddisfano all'equazione della sfera, mentre sono ordinarie le posizioni in cui la distanza di tale punto dall'origine è maggiore di uno.

Chiariamo ora la distinzione fra vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo. Un vincolo si dice fisso se il tempo non compare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Tutti gli esempi finora analizzati sono vincoli fissi. Un vincolo è invece dipendente dal tempo se il tempo appare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Un esempio di vincolo dipendente dal tempo è quello di un punto P vincolato ad una retta r che ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse normale e incidente tale retta. Se la rotazione è uniforme allora tale vincolo si esprime nella forma

$$\theta = \pm\omega t + \theta_0$$

a seconda che tale rotazione sia destra o sinistra.

Infine un vincolo che presuppone l'interazione fra elementi facenti parti del sistema è detto interno. Un tipico esempio di sistema soggetto a vincolo interno è costituito da un corpo rigido. Infatti, si è già avuto modo di osservare che la velocità di ogni punto di un sistema rigido è nota una volta che siano assegnati i due vettori caratteristici ω e \vec{v}_O (si veda il capitolo dedicato ai corpi rigidi per maggiori dettagli) e questo determina che le sue parti non possono muoversi indipendentemente l'una dall'altra. Sono vincoli esterni invece quelli che operano fra una parte fissa (il cosiddetto telaio) e un elemento del sistema.

2 Coordinate lagrangiane e sistemi olonomi

Consideriamo un sistema materiale vincolato. In un fissato istante t ogni punto del sistema occupa una determinata posizione, compatibilmente a quelle permesse dai vincoli. Quindi l'insieme delle posizioni occupate all'istante t dai punti del sistema individua la cosiddetta *configurazione del sistema all'istante considerato t* . In tutti i problemi che saranno affrontati in questo corso, sarà sempre possibile descrivere la configurazione del sistema attraverso un numero finito di parametri indipendenti. Illustriamo meglio quest'ultima affermazione riconsiderando alcuni degli esempi discussi nella sezione precedente e considerandone qualche altro.

Un punto P vincolato a stare su una curva, è individuato da un solo parametro: si potrebbe scegliere come parametro l'ascissa curvilinea s di P su tale curva. Un punto vincolato a stare su una superficie è individuato da due parametri indipendenti che potremo indicare con u, v essendo tali parametri tali che $\vec{x}(u, v)$ fornisca una parametrizzazione della superficie. La configurazione di un corpo rigido, libero da vincoli esterni, è individuata da sei parametri indipendenti: si potrebbero scegliere per tali parametri le tre coordinate di un punto del corpo e i tre angoli di Eulero. Se invece sul corpo rigido agiscono dei vincoli esterni in modo che esso abbia un punto fisso, allora per determinarne la posizione bastano i tre angoli di Eulero. Come ulteriore esempio consideriamo un corpo rigido con un asse fisso. In tal caso la configurazione del sistema è, in ogni istante, individuata da un solo parametro: basta infatti assegnare l'angolo fra due piani, uno di questi fisso e l'altro solidale al corpo, contenenti l'asse fisso.

Si chiama *coordinata lagrangiana di un sistema materiale vincolato* ciascuno dei parametri indipendenti necessari a individuare la configurazione del sistema. A seconda del particolare problema studiato occorre scegliere i parametri lagrangiani che meglio consentono di affrontarne lo studio. In generale, tali coordinate si denotano con q_1, q_2, \dots, q_n , essendo n il numero di coordinate lagrangiane necessarie a specificare la configurazione del sistema. Negli esempi prima con-

siderati si potrebbero fare le seguenti scelte (che, ribadiamo, in contesti più specifici potrebbero non essere le più convenienti).

- *Punto vincolato a stare su una curva*: l'ascissa curvilinea può scegliersi come unica coordinata lagrangiana.
- *Sistema rigido senza vincoli esterni*: come coordinate lagrangiane possono adottarsi le tre coordinate x, y, z di un punto P del sistema e i tre angoli di Eulero θ, ϕ, ψ .
- *Corpo rigido con un asse fisso*: come unica coordinata lagrangiana si può scegliere l'angolo θ formato fra un piano fisso contenente l'asse e un piano solidale al corpo e passante per l'asse.

Possiamo introdurre la seguente definizione: *Un sistema si dice olonomo se è soggetto solo a vincoli di posizione e bilaterali, cioè del tipo (VI.1)*. Nei sistemi olonomi la posizione di ogni punto P del sistema dipende dalle n coordinate lagrangiane e, eventualmente, dal tempo. In formule si ha

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.7})$$

o, equivalentemente, le (VI.7) possono scriversi, scalarmente, come

$$x = x(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.8})$$

$$y = y(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (\text{VI.9})$$

$$z = z(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (\text{VI.10})$$

Come esempio, potremo considerare il *bipendolo*. Tale dispositivo è costituito da un punto materiale A vincolato a muoversi sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R e da un altro punto B soggetto al solo vincolo di rigidità rispetto al punto A (cioè la distanza fra A e B è invariabile e supponiamo sia uguale a l .) Conviene scegliere come parametri lagrangiani gli angoli θ e ϕ indicati in figura (si osservi anche il verso dell'asse z !). In tal caso, si ha

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + l \sin \phi, \\ y = 0, \\ z = r \cos \theta + l \cos \phi, \end{cases}$$

e quindi le coordinate di B sono espresse mediante equazioni del tipo (VI.8).

Si osserva subito che, in base alla definizione, per i sistemi olonomi gli incrementi che le n coordinate lagrangiane possono subire sono del tutto arbitrari sia in grandezza che in segno. Se nella definizione di sistema olonomo non si fosse richiesto che ogni vincolo fosse bilaterale, allora questo non sarebbe più vero:

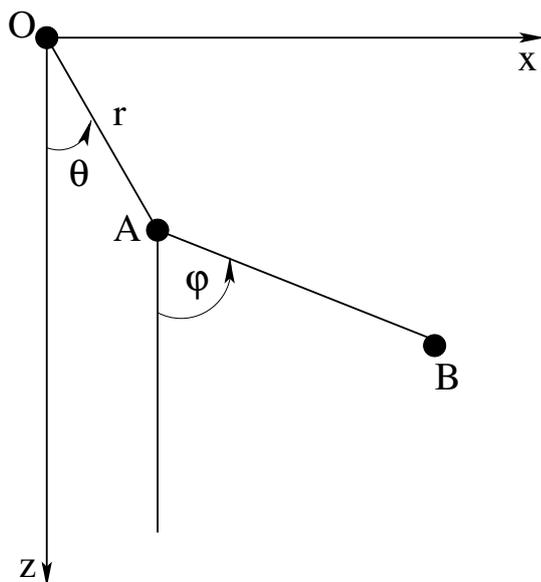


Figura VI.1: Bipendolo.

per esempio, nel caso di un punto appoggiato su un piano si avrebbe qualche limitazione del tipo $dq_r \geq 0$. Tenendo conto di questa osservazione possiamo introdurre i gradi di libertà nel seguente modo:

Si definisce numero di gradi di libertà di un sistema materiale il numero di incrementi arbitrari indipendenti che le coordinate lagrangiane possono subire compatibilmente con i vincoli. In particolare, per un sistema olonomo il numero di gradi di libertà coincide sempre con il numero di coordinate lagrangiane.

3 Cenni sui sistemi anolonomi

Sebbene in questo corso tratteremo quasi esclusivamente il caso di vincoli di posizione, per completezza introduciamo anche i vincoli di mobilità, cioè quei vincoli tali che la loro rappresentazione analitica implica la dipendenza dalle velocità dei punti del sistema, oltre che dalla posizione occupata da questi punti. Più precisamente possiamo dare la seguente definizione: Un vincolo si dice di *mobilità* e bilaterale se si può rappresentare con un'equazione del seguente tipo:

$$\sum_{h=1}^N [a_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{z}_h] + f(P_1, \dots, P_N; t) = 0, \quad (\text{VI.11})$$

in modo che non esista una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \quad (\text{VI.12})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f, \quad (\text{VI.13})$$

per $h = 1, 2, \dots, N$. Quest'ultima richiesta deve sempre essere soddisfatta se il vincolo è di mobilità. Infatti, se così non fosse, tenendo conto della (VI.11) si avrebbe:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{h=1}^N [a_h \dot{x}_h + b_h \dot{y}_h + c_h \dot{z}_h] + f = 0$$

da cui si ottiene subito $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t) = \text{cost.}$ e quindi il vincolo sarebbe di posizione!

I vincoli di posizione appaiono quasi sempre quando si studiano problemi di rotolamento. Nei seguenti due esempi mostriamo come la condizione di non integrabilità della funzione F assuma un carattere decisivo. Si assuma la guida rettilinea coincidente con l'asse x . Poichè il disco rotola senza strisciare, ad ogni

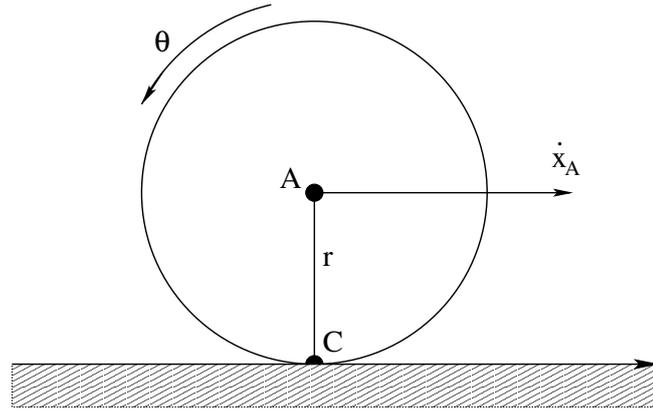


Figura VI.2: Disco circolare vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea.

istante l'unico punto C di contatto fra disco e guida avrà velocità nulla. Se con O indichiamo il centro del disco e con R il suo raggio, l'applicazione della formula fondamentale della cinematica a questi due punti fornisce la seguente equazione

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (C - O),$$

ed essendo nulla la velocità del punto di contatto si ha

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (C - O) = \vec{0}. \quad (\text{VI.14})$$

Considerando la proiezione di tale equazione lungo l'asse x e denotando con $\dot{\theta}$ la velocità angolare del disco, si trova la rappresentazione analitica del vincolo

$$\dot{x}_A + R\dot{\theta} = 0. \quad (\text{VI.15})$$

Questa equazione rappresenta solo apparentemente un vincolo di mobilità, in quanto la (VI.15) può essere integrata conducendo alla seguente equazione

$$x_A + R\theta = \text{cost.} . \quad (\text{VI.16})$$

In definitiva, il vincolo cui deve soddisfare un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea è di tipo posizionale. Cerchiamo, anche in questo caso, di rappresentare analiticamente il vincolo. A tal fine, prendiamo come piano fisso su cui la sfera rotola, il piano di equazione $\zeta = 0$, e consideriamo il riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$ con origine Ω su tale piano. Consideriamo poi il riferimento mobile $Oxyz$ solidale alla sfera (di raggio R) e avente origine nel centro della sfera stessa e supponiamo che gli assi ζ e z si trovino dalla stessa parte del piano in cui giace la sfera. Ora introduciamo le coordinate lagrangiane che, ad ogni

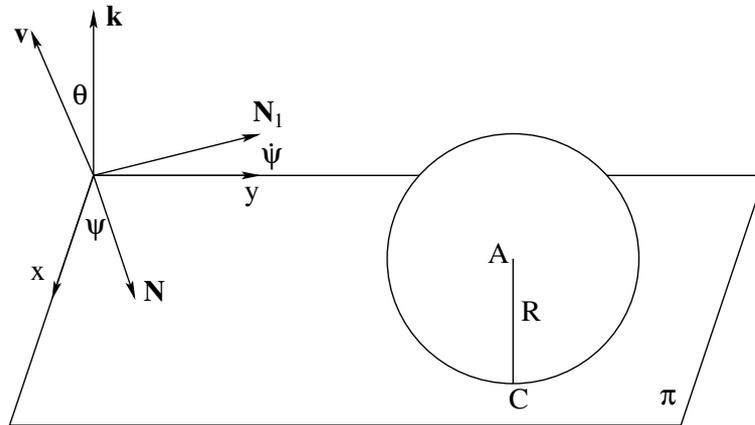


Figura VI.3: Sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare sul piano π .

istante t , consentono di individuare in modo univoco la posizione della sfera. Tale posizione sarà completamente conosciuta qualora sia nota la posizione del centro della sfera $O(\alpha, \beta, R)$ rispetto alla terna fissa (o equivalentemente del suo unico punto di contatto C) e sia specificato il suo orientamento rispetto alla terna fissa. Tale orientamento è individuato tramite gli angoli di Eulero θ, ϕ, ψ . In definitiva, servono cinque coordinate lagrangiane $(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$. Occorre osservare che ad ogni sistema di valori di questi parametri corrisponde un'unica posizione della sfera a contatto con il piano. Inoltre, se le coordinate lagrangiane sono espresse da cinque funzioni del tempo, si ottengono le equazioni del moto della sfera

costantemente a contatto con il piano di equazione $\zeta = 0$. Per ottenere un moto di puro rotolamento occorre inoltre che la velocità dell'unico punto di contatto C della sfera con il piano sia nulla. Tenendo conto di questa informazione e applicando la formula fondamentale della cinematica ai punti C e O , si perviene alla seguente

$$\vec{v}_O = (C - O) \wedge \vec{\omega}, \quad (\text{VI.17})$$

essendo $\vec{\omega}$ la velocità angolare della sfera. Si verifica subito che sia $\vec{\omega}$ che \vec{v}_O sono paralleli al piano fisso (\vec{v}_O perchè è la velocità del centro della sfera che si muove parallelamente al piano, $\vec{\omega}$ in quanto perpendicolare al vettore $C - O$) Proiettando, la (VI.17) lungo gli assi ξ, η, ζ si trova (indicando con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori di tali assi e con $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ le componenti della velocità angolare rispetto a tali assi)

$$\dot{\alpha}\vec{e} + \dot{\beta}\vec{f} = R(\dot{\omega}_1\vec{f} + \dot{\omega}_2\vec{g}). \quad (\text{VI.18})$$

Ricordando le equazioni (IV.61) e (IV.67), si trovano le espressioni di $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ in funzione degli angoli di Eulero

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_2 = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta. \end{cases}$$

Utilizzando queste ultime e le (VI.18), si trova la rappresentazione analitica del vincolo di puro rotolamento

$$\dot{\alpha} = R(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta), \quad (\text{VI.19})$$

$$\dot{\beta} = R(\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta). \quad (\text{VI.20})$$

Si può dimostrare che queste relazioni non sono integrabili, nel senso che non esiste una funzione $F(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$ tale che, differenziando questa equazione rispetto al tempo e tenendo conto delle (VI.19), si arriva a delle identità. Tralasciamo la dimostrazione di questo fatto.

Anche i vincoli di mobilità possono essere classificati come unilaterali, fissi o dipendenti dal tempo. Più precisamente un vincolo di mobilità è unilaterale se si può rappresentare con una disequazione del seguente tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N [a_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots, P_N; t)\dot{z}_h] \\ + f(P_1, \dots, P_N; t) \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

in modo però che non esista una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \quad (\text{VI.22})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f. \quad (\text{VI.23})$$

Un vincolo di mobilità è detto *fisso* se nella loro espressione analitica (VI.11) il tempo non figura esplicitamente, mentre è detto *dipendente dal tempo* se nella (VI.11) il tempo appare esplicitamente.

Possiamo dare la seguente definizione: Un sistema è detto *anolonomo* se è soggetto a soli vincoli bilaterali, di cui almeno uno di mobilità.

Si è sottolineato, nella precedente sezione, che per un sistema olonomo il numero di gradi di libertà è esattamente uguale al numero di coordinate lagrangiane. Questa affermazione non rimane vera se riferita a sistemi anolonomi. Più precisamente, in un sistema anolonomo il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di coordinate lagrangiane diminuito del numero di vincoli di mobilità (o, il che è lo stesso, del numero di relazioni non integrabili). Infatti, in tali sistemi, gli incrementi di tali coordinate non sono indipendenti fra loro ma legati dalle relazioni lineari che si ottengono moltiplicando per dt i vincoli di mobilità del tipo (VI.11). Per esempio, nel caso prima considerato della sfera che rotola senza strisciare sopra un piano, si è visto che per determinare ad ogni istante la configurazione della sfera occorrono cinque coordinate lagrangiane $\alpha, \beta, \theta, \psi, \phi$. Gli incrementi di tali coordinate sono legati dalle seguenti relazioni lineari (ottenute moltiplicando per dt le (VI.19)), si ottiene

$$d\alpha - R \sin \psi d\theta + R \cos \psi \sin \theta d\phi = 0, \quad (\text{VI.24})$$

$$d\beta + R \cos \psi d\theta + R \sin \psi \sin \theta d\phi = 0. \quad (\text{VI.25})$$

Quindi solo tre dei cinque incrementi delle coordinate lagrangiane possono essere attribuiti ad arbitrio mentre gli altri due sono determinati dalle (VI.24). Perciò il numero dei gradi di libertà del sistema è tre. (Si osservi che questo è in perfetto accordo con il fatto che ad ogni istante l'atto di moto è una rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto C .)

4 Spostamenti effettivi e spostamenti virtuali

Capitolo VII

Dinamica Newtoniana

1 Meccanica di una particella

I fondamenti teorici della meccanica classica risalgono ai tre volumi di *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (in breve, Principia), pubblicati nel 1687 da Isaac Newton (1643-1727). I Principia hanno rivoluzionato la fisica, poichè in essi, per la prima volta, viene presentata una teoria matematica consistente della meccanica classica. Nei libri sono stati introdotti per la prima volta il calcolo differenziale¹ e il calcolo integrale.

La meccanica classica riguarda la dinamica dei punti materiali (e di corpi, cioè di aggregazioni di punti materiali) in uno spazio euclideo tridimensionale, \mathbb{R}^3 , in cui i moti dipendono dal tempo t . Lo spazio ed il tempo sono ambedue assoluti. Inoltre, lo spazio è isotropo nel senso che le sue proprietà fisiche sono globalmente le stesse in tutte le direzioni. Le forze influiscono sulle particelle in modo istantaneo, qualunque sia la distanza tra loro, anche se le particelle si trovano in galassie diverse. Due osservatori, trovandosi in luoghi diversi, misurano gli stessi valori della posizione di un punto materiale e dell'istante in cui si verifica un certo evento, se utilizzano lo stesso sistema di riferimento.

Già durante la sua vita, Newton è stato criticato per aver introdotto il postulato dell'istantaneità dell'effetto di una forza su un punto materiale. Dopo lo sviluppo della relatività speciale (1905) e della relatività generale (1916) ad opera di Albert Einstein (1879-1955), è apparso chiaro che la meccanica classica è soltanto un'ottima approssimazione della meccanica relativistica per velocità molto inferiori di quella della luce ($c \simeq 300.000 \text{ km/s}$) e per campi gravitazionali deboli. Inoltre, le leggi della meccanica classica vanno sostituite da quelle della meccanica quantistica per distanze microscopiche essendo, in principio, impos-

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pubblicò una teoria del calcolo differenziale per poter calcolare l'area sotto il grafico di una funzione $y = f(x)$ nel 1686, costringendo Newton alla pubblicazione dei Principia. Leibniz utilizzava la notazione f' e Newton dy/dx .

sibile separare l'effetto delle osservazioni delle quantità fisiche dall'intervento stesso dell'osservazione.

Isaac Newton ha formulato le tre leggi su cui poggia l'edificio della meccanica classica (note con il nome di leggi di Newton). La *prima legge di Newton* (o *principio d'inerzia*) afferma che un punto materiale si muove con velocità vettoriale costante se non viene sottoposto ad una forza.² In altre parole, l'effetto di una forza è di **cambiare** la velocità vettoriale (sia la velocità scalare, sia la sua direzione), cioè di causare un'accelerazione vettoriale. Ciò contraddice le idee in vigore dai tempi di Aristotele (384 aC-322 aC). Infatti, la legge sembra essere controintuitiva, poichè secondo la nostra esperienza, la mancanza di una forza implica che la particella resti ferma. Purtroppo una tale esperienza è basata sul fatto che abbiamo la tendenza di non prendere in considerazione certe forze (quali, ad esempio, la forza d'attrito).

Secondo la *seconda legge di Newton* (il cosiddetto *principio di proporzionalità*), la forza totale \mathbf{F} agente sulla particella è la derivata della *quantità di moto* \mathbf{p} (o *momento lineare* rispetto al tempo t):³

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (\text{VII.1})$$

Indicando con i pedici x , y e z le componenti lungo gli assi di un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ di \mathbb{R}^3 , si può proiettare la (VII.1) lungo tali assi, ottenendo

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

La quantità di moto è definita come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (\text{VII.2})$$

dove \mathbf{v} è la velocità vettoriale della particella e m è la sua *massa*. Nella maggior parte dei casi la massa della particella è costante e la (VII.1) si riduce a⁴

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (\text{VII.3})$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione vettoriale della particella. La prima legge di Newton si può dedurre dalla (VII.1) come seguente *legge di conservazione della quantità*

²Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

³Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

⁴In molti testi la (VII.3) viene enunciata come la seconda legge di Newton.

di moto: se la forza totale \mathbf{F} è zero, allora $\dot{\mathbf{p}} = \vec{0}$ e la quantità di moto \mathbf{p} si conserva.

Nella cinematica del punto abbiamo trattato le velocità vettoriali e le accelerazioni vettoriali come vettori liberi in \mathbb{R}^3 , spesso dipendenti da t , che si possono comporre: Una velocità vettoriale ha componenti x , y e z , oppure ha componenti radiale e trasversa, che hanno la velocità vettoriale totale come loro risultante. Nella meccanica classica le forze che agiscono su una particella (considerata un punto materiale) si comportano nello stesso modo: La forza totale agente sulla particella è la risultante di tutte le forze agenti su essa. La stessa cosa vale per la quantità di moto.

Il *momento angolare* \mathbf{L} di una particella rispetto all'origine O dello spazio tridimensionale è definito dall'espressione

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p},$$

dove \mathbf{r} è il *raggio vettore diretto da O verso la particella*. Definendo il *momento della forza* rispetto ad O come

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F},$$

si vede subito che

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \stackrel{\text{(VII.1)}}{=} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{v}} \wedge \underbrace{\mathbf{p}}_{=m\mathbf{v}} + \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{L}},$$

poichè $\mathbf{v} \wedge (m\mathbf{v}) = \vec{0}$. Abbiamo trovato la seguente *legge di conservazione del momento angolare* di una particella: se il momento totale \mathbf{N} della forza è uguale a zero, allora $\dot{\mathbf{L}} = \vec{0}$ e il momento angolare \mathbf{L} si conserva.

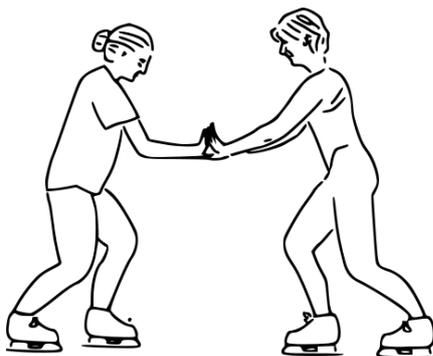


Figura VII.1: Secondo la terza legge di Newton, i due pattinatori esercitano forze collineari opposte l'uno sull'altro. Vedi wikipedia (Newton's laws).

La *terza legge di Newton* riguarda due particelle. La legge dice che le forze che le due particelle esercitano l'una sull'altra, hanno la stessa intensità e direzioni collineari opposte.⁵ In altre parole, se \mathbf{F} è la forza esercitata dalla prima particella sull'altra, allora $-\mathbf{F}$ è la forza esercitata dalla seconda particella sulla prima, mentre

$$\mathbf{F} \wedge (Q - P) = \vec{0},$$

essendo P e Q le posizioni delle due particelle. La terza legge viene anche chiamata il *principio di azione e reazione*. La terza legge implica che tutte le forze sono interazioni tra particelle; quindi non esistono forze unilaterali che agiscono su una singola particella se sono presenti altre particelle.

Le leggi di Newton, come tutte le altre leggi della fisica, dipendono dal moto dell'osservatore rispetto all'oggetto fisico. Infatti le tre leggi valgono soltanto in un cosiddetto *sistema inerziale*. Spesso la prima legge viene interpretata come definizione del sistema inerziale: I sistemi inerziali sono esattamente i sistemi di coordinate in cui vale la prima legge. Indichiamo con $\{\tau_i\}$ la classe di tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Osserviamo che affinché la (VII.1) (e la (VII.3)) acquistino un preciso significato, occorre specificare lo spazio fisico di riferimento e la scala dei tempi a cui queste leggi si riferiscono. Infatti, se focalizziamo l'attenzione sulla (VII.3), mentre \mathbf{F} traduce azioni fisiche concrete (dovute alla presenza di altri corpi) e ha significato assoluto, l'accelerazione \mathbf{a} è una grandezza relativa (cioè per essere definita occorre specificare lo spazio fisico e la scala dei tempi). Pertanto il legame stabilito da (VII.3) (e da (VII.1)) sarà verificato solo in riferimenti privilegiati e indichiamo con R^* uno di questi. Come già osservato, in R^* dovrà essere soddisfatta anche la prima legge della dinamica che potrà quindi enunciarsi nel seguente modo: *In assenza di forze un punto materiale si muove (rispetto a R^*) di moto rettilineo e uniforme, oppure rimane indefinitamente in quiete.* In particolare, l'uniformità del moto comporta che la scala assoluta dei tempi in R^* è scelta con la condizione che siano uguali i tempi nei quali vengono percorsi, in assenza di forze, spazi uguali. Tale scala dei tempi non è quindi univoca, ma definita a meno di una trasformazione lineare. Infatti se t e t' indicano due scale dei tempi che soddisfano in R^* il principio di inerzia, la condizione che ogni moto uniforme nella prima scala lo sia anche nella seconda, implica le seguenti relazioni:

$$\frac{ds}{dt} = c_1, \quad \frac{ds}{dt'} = c_2,$$

⁵Lex III: Actioni contrariam semper et qualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse quales et in partes contrarias dirigi.

essendo c_1 e c_2 costanti. Dalle due relazioni di sopra si ricava subito che $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt'}$ e quindi $\frac{dt}{dt'} = \text{const}$, e da quest'ultima relazione otteniamo il legame fra le due scale dei tempi (assoluti) in R^* :

$$t = at' + b$$

essendo a e b due costanti numeriche.

Se ora indichiamo con $\{\tau^*\}$ l'insieme dei sistemi di riferimento spaziali per cui è valida la legge (VII.1) (essendo la scala dei tempi determinata dalla legge d'inerzia come mostrato sopra), si può dimostrare che anche tale classe coincide con la classe dei riferimenti inerziali, o, in altre parole, $\{\tau^*\} = \{\tau_i\}$ (tralasciamo per semplicità espositiva la non difficile dimostrazione di questo fatto). A questo punto diventa importante specificare almeno un sistema di riferimento inerziale, poichè tutti gli altri sistemi (inerziali) saranno caratterizzati dal muoversi di moto traslatorio uniforme rispetto ad esso. Solitamente, si assume come riferimento spaziale τ^* , una terna ottenuta dalle *stelle fisse*, nel senso che gli assi sono costantemente diretti verso tre stelle fissate ad arbitrio e talmente lontane dalla terra da apparire fisse (ad un osservatore solidale alla terra stessa) e l'origine di tale riferimento è posta in una stella analoga.

Giova anche sottolineare che un riferimento avente l'origine localizzata nel centro della terra e per assi una terna di assi solidali alla terra, non può considerarsi inerziale in quanto, rispetto ad esso, ogni singola stella che sia sufficientemente lontana da tutti i corpi celesti (quindi su di essa non agiscono forze) descrive una traiettoria non rettilinea violando così il principio di inerzia. Va comunque rimarcato che, nei problemi di meccanica terrestre, in prima approssimazione si può identificare τ^* con una terna solidale alla Terra.

Le tre leggi di Newton sono invarianti sotto le cosiddette trasformazioni galileiane. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ (traslazione temporale), ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ (traslazione spaziale), ogni $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ (moto uniforme) ed ogni matrice ortogonale del terzo ordine R (rotazione se $\det R = 1$; rotazione più riflessione se $\det R = -1$) la corrispondente *trasformazione galileiana* è definita come

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t, \\ t' = t + t_0. \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

La massa resta invariante sotto una tale trasformazione. Utilizzando che le derivate rispetto a t e t' coincidono, otteniamo dalla (VII.4) per la velocità vettoriale e l'accelerazione vettoriale

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= R\mathbf{v} + \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{a}' &= R\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Dunque la quantità di moto e la forza si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= m\mathbf{v}' = m(R\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) = R\mathbf{p} + \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{F}' &= \dot{\mathbf{p}}' = R\dot{\mathbf{p}} = R\mathbf{F}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, le prime due leggi di Newton sono invarianti sotto le trasformazioni galileiane. La stessa cosa vale per la terza legge. È facile dimostrare che tutte le trasformazioni galileiane sono composte dalle seguenti quattro trasformazioni galileiane elementari: a) traslazioni spaziali ($\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, $t' = t$), b) traslazioni temporali ($\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $t' = t + t_0$), c) moti uniformi ($\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}_0 t$, $t' = t$), e d) rotazioni e riflessioni ($\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$, $t' = t$).

2 Meccanica di un sistema di particelle

Per estendere la meccanica classica a sistemi di più particelle, bisogna fare una distinzione tra *forze esterne*, esercitate sulle particelle da sorgenti poste al di fuori del sistema, e *forze interne*, esercitate su ogni particella del sistema da tutte le altre particelle del sistema stesso. Così, la seconda legge di Newton per la particella i -esima assume la forma:

$$\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (\text{VII.5})$$

dove $\mathbf{F}_i^{(e)}$ rappresenta la forza esterna e \mathbf{F}_{ji} la forza interna sulla particella i -esima dovuta a quella j -esima. Secondo la terza legge di Newton, si ha per $i \neq j$

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (\text{VII.6a})$$

$$\mathbf{F}_{ji} \wedge (P_i - P_j) = \vec{0}, \quad (\text{VII.6b})$$

essendo P_i la posizione della particella i -esima.

Sommando su tutte le particelle e poichè $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{x}_i$ (essendo m_i la massa e \mathbf{x}_i il raggio vettore della particella i -esima), la (VII.5) assume la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{x}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \{\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}\} \stackrel{(\text{VII.6a})}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Definendo la massa totale M e la forza esterna totale $\mathbf{F}^{(e)}$ come

$$M = \sum_i m_i, \quad \mathbf{F}^{(e)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)},$$

otteniamo l'equazione di moto

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (\text{VII.7})$$

dove

$$\mathbf{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M} = \left(\frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \right) \quad (\text{VII.8})$$

si chiama *baricentro* o *centro di massa* del sistema di particelle. Quindi le sole forze interne non hanno alcun effetto sul moto del centro di massa.

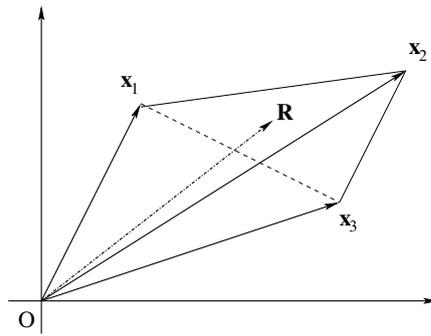


Figura VII.2: Baricentro di tre particelle. Si osservi che il baricentro appartiene alla faccia del tetraedro costituita dagli estremi dei vettori \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 .

Calcoliamo ora la quantità di moto totale del sistema:

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{x}_i \right) = \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) = M\dot{\mathbf{R}}.$$

Si trova così *legge di conservazione della quantità di moto* di un sistema di particelle: se la risultante delle forze esterne è zero, la quantità di moto totale si conserva.

Definiamo ora il momento angolare totale del sistema come

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} &= \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i) \\
&= \sum_i \cancel{(\mathbf{v}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i)} + \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i) \\
&\stackrel{\text{(VII.5)}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ji}) \\
&= \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ij}) \\
&\stackrel{\text{(VII.6a)}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \wedge \mathbf{F}_{ji} \\
&\stackrel{\text{(VII.6b)}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}).
\end{aligned}$$

Definendo il *momento delle forze esterne* $\mathbf{N}^{(e)}$ come

$$\mathbf{N}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}),$$

otteniamo

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^{(e)}.$$

In altre parole, abbiamo dimostrato la *legge di conservazione del momento angolare totale*: il momento angolare totale \mathbf{L} è costante nel tempo se il momento delle forze esterne è uguale a zero.

Scomponiamo il momento angolare \mathbf{L} in due termini: uno riguardante il moto come se il sistema fosse concentrato nel baricentro, e l'altro riguardante il moto attorno al baricentro. A tal fine, introduciamo le seguenti quantità relative al baricentro:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}, \quad (\text{VII.9})$$

dove $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$. Dunque

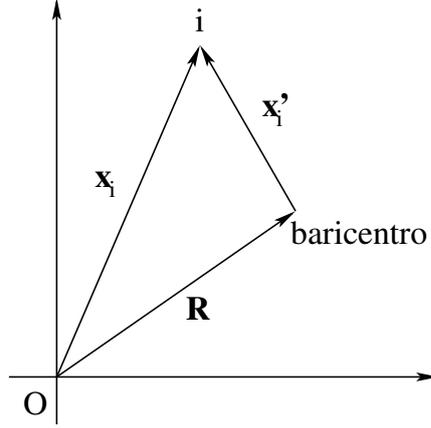


Figura VII.3: Moto della particella i -esima relativo al baricentro.

$$\begin{aligned}
L &= \sum_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{p}_i) \\
&= \sum_i (\mathbf{R} \wedge m_i \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (m_i \mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{R} \wedge m_i \dot{\mathbf{x}}'_i) \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) + \cancel{M\mathbf{R} \wedge M\mathbf{R}} \wedge \mathbf{V} + \mathbf{R} \wedge \frac{d}{dt} \sum_i m_i [\mathbf{x}_i - \mathbf{R}] \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \mathbf{V}) + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) + \mathbf{R} \wedge \frac{d}{dt} \cancel{M\mathbf{R} \wedge M\mathbf{R}} \\
&= \mathbf{R} \wedge M\mathbf{V} + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i) \\
&= \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \sum_i (\mathbf{x}'_i \wedge \mathbf{p}'_i),
\end{aligned}$$

dove il primo termine è il momento angolare se l'intero sistema fosse concentrato nel baricentro e il secondo termine corrisponde al moto attorno al baricentro.

3 Lavoro, energia cinetica e energia potenziale

In questo paragrafo discutiamo il lavoro compiuto da una forza, l'energia cinetica e quella potenziale, sia per una singola particella che per un sistema di particelle.

3.1 Lavoro e energia cinetica

Consideriamo una singola particella di massa m sotto l'effetto di una forza \mathbf{F} . Il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} sulla particella per lo spostamento dal punto 1

al punto 2 è definito come

$$W_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (\text{VII.10})$$

dove l'integrale curvilineo viene calcolato lungo la traiettoria della particella. Se la massa m è costante, risulta

$$W_{12} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2),$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità scalari nei rispettivi punti 1 e 2. La quantità

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

viene chiamata *energia cinetica*. Il lavoro compiuto dalla forza per spostare la particella dal punto 1 al punto 2 è uguale all'aumento della energia cinetica:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Per un sistema di particelle (del tipo studiato nel paragrafo 2), calcoliamo il lavoro totale compiuto da tutte le forze, esterne ed interne, per lo spostamento del sistema dalla configurazione iniziale 1 alla configurazione finale 2:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i \\ &\stackrel{(\text{VII.5})}{=} \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right). \end{aligned}$$

Introducendo l'*energia cinetica totale* T come

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2,$$

segue che il lavoro compiuto da tutte le forze per spostare il sistema di particelle dalla configurazione 1 alla configurazione 2 è uguale all'aumento della energia cinetica totale:

$$W_{12} = T_2 - T_1.$$

Scriviamo ora la velocità vettoriale come la somma di due termini: la velocità vettoriale del baricentro e la velocità relativa al baricentro, come fatto prima

nella (VII.9). In tal caso

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{x}'_i \right) \\
&\stackrel{\text{(VII.9)}}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i [\mathbf{x}_i - \mathbf{R}] \right) \\
&\stackrel{\text{(VII.8)}}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \cancel{(\mathbf{M}\mathbf{R} - \mathbf{M}\mathbf{R})} \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [v'_i]^2,
\end{aligned}$$

dove $V = \|\mathbf{V}\|$ e $v'_i = \|\mathbf{v}'_i\|$. Come il momento angolare, anche l'energia cinetica si compone di due parti: l'energia cinetica che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro, più l'energia cinetica corrispondente al moto attorno al baricentro.

3.2 Forze conservative e energia potenziale

Una forza \mathbf{F} che agisce su una singola particella di massa m si dice *conservativa*, se il lavoro W_{12} compiuto dalla \mathbf{F} per spostare la particella dal punto 1 al punto 2 dipende soltanto dai punti 1 e 2 e non dalla traiettoria seguita per passare da 1 a 2. In tal caso si può scegliere un punto di riferimento, che indichiamo con 0, e definire l'*energia potenziale* (o *potenziale*) U_1 come il lavoro compiuto dalla forza per spostare la particella dal punto 1 al punto di riferimento 0, cioè,

$$U_1 = W_{10} = -W_{01} = - \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Poichè

$$U_1 = W_{10} = T_0 - T_1,$$

essendo T_1 e T_0 le energie cinetiche della particella nei punti 1 e 0, otteniamo

$$T_1 + U_1 = T_0. \quad \text{(VII.11)}$$

L'equazione (VII.11) esprime il fatto che l'*energia totale*, essendo la somma delle energie cinetica e potenziale, non cambia nel tempo. Per l'energia totale esiste un'ambiguità basata sulla scelta del punto di riferimento. Se scegliessimo un altro punto di riferimento, che indichiamo con $0'$, e definissimo $U'_1 \stackrel{\text{def}}{=} W_{10'}$, allora

$$U'_1 - U_1 = W_{10'} - W_{10} = -W_{0'1} - W_{10} = -W_{0'0} = W_{00'},$$

cioè la differenza di energia potenziale nel punto 1 eguaglierebbe il lavoro compiuto per spostare la particella dal punto di riferimento 0 al nuovo punto di riferimento 0'.

Ricaviamo ora il legame tra la forza e l'energia potenziale. Supponiamo che la forza dipenda dalla posizione, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, e scegliamo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ come punto di riferimento in cui si annulla l'energia potenziale, risulta

$$U(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}(\mathbf{x}'), \quad (\text{VII.12})$$

indipendentemente dalla traiettoria che connette \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Sia

$$\varphi(\tau) = (1 - \tau)\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{x}, \quad \tau \in [0, 1],$$

il segmento che congiunge \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} . Allora

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Quindi

$$s(\tau) = \int_0^\tau \left\| \frac{d\varphi}{d\tau} \right\| d\tau = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \tau.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' \\ &= - \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(\tau)) \cdot d\varphi(\tau) = - \int_0^1 \mathbf{F}(\varphi(\tau)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{VII.13})$$

Teorema VII.1 Sia \mathbf{F} una forza conservativa e sia U il potenziale. Allora

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (\text{VII.14})$$

Dimostrazione. Supponiamo che ci siano due funzioni a valori vettoriali $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ tali che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$U(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}'. \quad (\text{VII.15})$$

Supponiamo cioè che esistano due forze conservative $\mathbf{F}^{(1)}$ e $\mathbf{F}^{(2)}$ che conducono alla stessa energia potenziale. In tal caso la funzione a valori vettoriali $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{F}^{(2)}$ verifica, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, la relazione

$$\int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} \Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{y}} \Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}' = \vec{0},$$

e quindi $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}') \equiv \vec{0}$. In altre parole, $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}^{(2)}$.

Verifichiamo ora che la funzione (VII.14) è soluzione della (VII.13). Infatti,

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (-\nabla U)(\varphi(\tau)) \cdot d\varphi(\tau) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} U(\varphi(\tau)) d\tau \\ &= [U(\varphi(\tau))]_{\tau=0}^1 = U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}_0) = U(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Poichè vale la (VII.15) per $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}$ e $\mathbf{F}^{(2)} = -\nabla U$, risulta la (VII.14), grazie alla prima parte della dimostrazione. \square

Definiamo il *rotore* della forza $\mathbf{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ come⁶

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Se la forza $\mathbf{F} = -\nabla U$ è conservativa, allora

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{F} &= \left(-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che le derivate parziali del secondo ordine non dipendono dell'ordine di derivazione parziale.⁷ In altre parole, una forza conservativa \mathbf{F} è *irrotazionale* nel senso che

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \vec{0}. \quad (\text{VII.17})$$

Esempio VII.2 Esistono forze irrotazionali che non sono conservative. Infatti, sia

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j},$$

dove \mathbf{x} è un punto di \mathbb{R}^3 che non appartiene all'asse z . Si verifica facilmente la (VII.17); quindi la forza \mathbf{F} è irrotazionale. Sia γ la traiettoria definita come $\gamma = \{\mathbf{x}(t) : t \in [0, 2\pi]\}$, dove

$$\mathbf{x}(t) = \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}.$$

⁶Un'altra notazione per il rotore è $\text{rot } \mathbf{F}$.

⁷Ci vuole l'ipotesi che il potenziale U sia di classe C^2 (oppure: che le componenti della forza siano di classi C^1) per poter applicare il teorema di Schwartz.

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla \mathbf{F} per spostare la particella lungo la traiettoria chiusa γ :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \right) \cdot \left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2(t) + \cos^2(t)] dt = 2\pi, \end{aligned}$$

il che dimostra che \mathbf{F} non è una forza conservativa.

Nella seguente tabella presentiamo un confronto tra concetti simili utilizzati nei corsi di meccanica razionale e nei corsi di analisi matematica.

meccanica razionale	analisi matematica
$\mathbf{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$	$\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
forza conservativa	forma differenziale esatta
energia potenziale U	funzione primitiva $-U$
forza irrotazionale	forma differenziale chiusa
lavoro	integrale curvilineo

Consideriamo ora un sistema di particelle. La particella i -esima del sistema è sottoposta ad una forza $\mathbf{F}_i^{(e)}$ ed ad una forza interna \mathbf{F}_{ji} dalla parte della particella j -esima, con $j \neq i$. Le forze interne hanno le proprietà (VII.6) a causa della terza legge di Newton. Supponiamo che tutte le forze esterne siano conservative (cioè, che $\mathbf{F}_i^{(e)} = -\nabla_i U_i$ per un opportuno potenziale U_i) e che le forze interne provengano dai potenziali

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|),$$

che dipendono soltanto dalla distanza tra le particelle. Sia ∇_i il vettore delle derivate parziali rispetto a \mathbf{x}_i . In tal caso le due forze sono uguali e opposte:⁸

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ij} = +\nabla_j U_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (\text{VII.18})$$

e dirette lungo la retta che congiunge le due particelle:

$$\nabla_i U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = -\nabla_j U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)f,$$

dove

$$f = \frac{U'(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

⁸ ∇_i denota le derivazioni parziali rispetto alle componenti di \mathbf{x}_i .

Quindi il lavoro compiuto da tutte le forze per lo spostamento del sistema dalla configurazione 1 alla configurazione 2 è dato da

$$\begin{aligned}
W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i \\
&= - \sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j \\
&\stackrel{\text{(VII.18)}}{=} - \sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_i U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_j U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_j
\end{aligned}$$

(utilizzando $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$ e $\nabla_i U_{ij} = \nabla_{ij} U_{ij} = -\nabla_j U_{ij}$)

$$\begin{aligned}
&= - \sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_j \\
&= - \sum_i \int_1^2 (\nabla_i U_i) \cdot d\mathbf{s}_i - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \int_1^2 (\nabla_{ij} U_{ij}) \cdot d\mathbf{s}_{ij} \\
&= - \sum_i [U_i]_1^2 - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} [U_{ij}]_1^2 = - [U]_1^2,
\end{aligned}$$

dove l'energia potenziale totale è data da

$$U = \sum_i U_i + \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} U_{ij} = \sum_i U_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}.$$

In analogia con il caso di una singola particella, si calcola facilmente che

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_2 - T_1,$$

dove

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

è l'energia cinetica totale. Di conseguenza,

$$W_{12} = T_2 - T_1 = - [U]_1^2.$$

Quindi abbiamo dimostrato che l'energia totale (cioè, l'energia cinetica più l'energia potenziale) non dipende dal tempo t .

4 Vincoli e reazioni vincolari

Finora abbiamo discusso soltanto sistemi di particelle le cui equazioni di moto hanno la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji},$$

dove le forze interne soddisfano alle (VII.6). In generale, bisogna tenere conto dei vincoli che limitano il moto del sistema.

Ci sono vari modi di classificare i vincoli. Se le condizioni imposte dai vincoli sono tali che le coordinate delle particelle e il tempo siano legate da equazioni del tipo

$$f_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, t) = 0, \quad (\text{VII.19})$$

allora si dice che i vincoli sono *olonomi*. Uno degli esempi principali è rappresentato dal corpo rigido, per il quale i vincoli sono esprimibili mediante equazioni della forma

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Un altro esempio di vincolo olonomo consiste in una particella che è costretta a muoversi lungo una curva o su una superficie. In tal caso, le funzioni f_j nella (VII.19) rappresentano le equazioni della curva o della superficie.

Esempio VII.3 (pendolo semplice) Consideriamo il pendolo semplice. Una massa m appesa ad un filo di lunghezza l è vincolata a muoversi nel piano Oxz sotto l'effetto della forza gravitazionale costante. La forza $\mathbf{F} = mg\vec{k}$ è conservativa con potenziale $U = -mgz$. I vincoli sono $y = 0$ e $x^2 + z^2 = l^2$. Introduciamo i versori

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\cos \theta)\vec{k} + (\sin \theta)\vec{i}, \\ \mathbf{w} &= -(\sin \theta)\vec{k} + (\cos \theta)\vec{i}. \end{aligned}$$

Allora $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\theta}\mathbf{w}$, $\dot{\mathbf{w}} = -\dot{\theta}\mathbf{u}$ e

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\theta}\mathbf{w} = (\dot{r} + r\dot{\theta})\mathbf{w} = l\dot{\theta}\mathbf{w},$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al vincolo $r = \sqrt{z^2 + x^2} = l$, cioè r è costante e $\dot{r} = 0$. Quindi l'energia cinetica si esprime nella forma

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2,$$

mentre l'energia potenziale è data da

$$U = -mgz = -mgl \cos \theta.$$

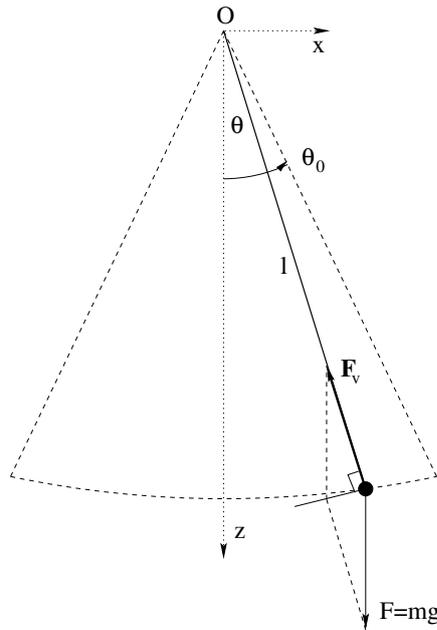


Figura VII.4: Il pendolo semplice.

Poichè l'energia totale $T + U$ non dipende dal tempo, risulta

$$0 = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta \right) = ml^2 \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \right).$$

Otteniamo in questo modo l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (\text{VII.20})$$

Se l'angolo θ è piccolo, possiamo approssimare $\sin \theta$ da θ e risolvere l'equazione di moto approssimativa

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta.$$

La sua soluzione generale è data dall'espressione

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l}) + \dot{\theta}_0 \frac{\sin(t\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}},$$

dove θ_0 e $\dot{\theta}_0$ sono l'angolo iniziale e la velocità angolare iniziale. Il moto del pendolo è periodico con periodo $2\pi\sqrt{l/g}$.

Si può anche introdurre una reazione vincolare \mathbf{F}_v , diretta verso l'origine O , tale che la risultante di \mathbf{F}_v e della forza gravitazionale $mg\vec{k}$ è tangenziale. In tal caso la reazione vincolare è la forza centripeta e si trova

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta),$$

che riconduce all'equazione di moto (VII.20).

Capitolo VIII

Forze Centrali e Problema dei Due Corpi

In questo capitolo studiamo il moto di un punto materiale sottoposto ad una forza centrale. Uno dei risultati più importanti che verrà presentato consiste nella derivazione delle tre leggi di Keplero. Come è noto tali leggi descrivono l'orbita di un pianeta nel sistema solare.

1 Cinematica

Consideriamo ora un moto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ per cui l'accelerazione $\ddot{\mathbf{r}}$ è collineare al moto, cioè

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (\text{VIII.1})$$

In tal caso

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0.$$

Di conseguenza $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ è un vettore costante. Nel caso in cui il vettore $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ si annulli, abbiamo la collinearità dei vettori \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ e $\ddot{\mathbf{r}}$ e il moto è rettilineo. Nel caso contrario i vettori \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ appartengono al piano per l'origine ortogonale al vettore costante $\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$, quindi il moto è piano.

Utilizzando la seconda legge di Newton, si vede che l'ipotesi (VIII.1) implica

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = 0, \quad (\text{VIII.2})$$

dove $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ è la forza che agisce sulla particella di massa m . Ciò implica che il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad (\text{VIII.3})$$

è costante, dove $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ è la quantità di moto. Il moto è rettilineo se $\mathbf{L} = 0$, mentre risulta essere ristretto al piano per l'origine ortogonale ad \mathbf{L} se $\mathbf{L} \neq 0$.

Scegliendo le coordinate (x, y, z) tali che $\mathbf{L} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{j} = 0$ e $\mathbf{L} \cdot \mathbf{k} > 0$, adottiamo le coordinate cilindriche (r, θ, z) tali che

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Introducendo il versore radiale $\hat{\mathbf{e}}_r$ e quello tangenziale $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ nel seguente modo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} = -(\sin \theta) \mathbf{i} + (\cos \theta) \mathbf{j}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= -(\sin \theta) \dot{\theta} \mathbf{i} + (\cos \theta) \dot{\theta} \mathbf{j} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= -(\cos \theta) \dot{\theta} \mathbf{i} - (\sin \theta) \dot{\theta} \mathbf{j} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r(\dot{\theta})^2 \cos \theta, \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r(\dot{\theta})^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

mentre $\ddot{z} = 0$. Di conseguenza, essendo $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (\text{VIII.4a})$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] \hat{\mathbf{e}}_r + [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (\text{VIII.4b})$$

Calcoliamo ora il momento angolare. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\ &= mr \hat{\mathbf{e}}_r \wedge (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} (\hat{\mathbf{e}}_r \wedge \hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \mathbf{k} = 2m \dot{A} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

dove $\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ è la velocità areale. Quindi $L = |\mathbf{L}| = 2m|\dot{A}|$ è il momento angolare.

2 Baricentro e Forze Centrali

Si considerino due oggetti di massa M_S e m (assimilabili, ad esempio, al Sole ed un pianeta che ruota intorno ad esso), che immagineremo di schematizzare

con due punti materiali, le cui posizioni rispetto all'origine O di un sistema di riferimento inerziale sono individuate dai due vettori posizione \mathbf{r}_1 (per il pianeta) e \mathbf{r}_2 (per il Sole). Le sole forze agenti sul sistema dei due corpi sono quelle di mutua interazione \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} , che supporremo essere dirette lungo il segmento tra i due corpi e di avere risultante zero.

Introduciamo le nuove variabili

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1 + M_S\mathbf{r}_2}{m + M_S},$$

dove \mathbf{r} è la posizione relativa del pianeta rispetto al Sole e \mathbf{R} è la posizione del centro di massa dei due corpi. Siccome

$$\mathbf{R} = \frac{m}{m + M_S}\mathbf{r}_1 + \frac{M_S}{m + M_S}\mathbf{r}_2$$

è una combinazione lineare convessa (cioè, aventi per coefficienti numeri compresi tra 0 e 1 la cui somma è 1) delle posizioni \mathbf{r}_1 del pianeta e \mathbf{r}_2 del Sole, la posizione del centro di massa \mathbf{R} appartiene al segmento congiungente dei due corpi. Le posizioni \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 si esprimono nelle nuove coordinate nel seguente modo:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{M_S}{m + M_S}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m}{m + M_S}\mathbf{r}.$$

Rispetto alle nuove coordinate l'energia cinetica totale si esprime come

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}M_S|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left|\dot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S}\dot{\mathbf{r}}\right|^2 + \frac{1}{2}M_S\left|\dot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S}\dot{\mathbf{r}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(m + M_S)|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\frac{mM_S}{m + M_S}|\dot{\mathbf{r}}|^2 \\ &= \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2, \end{aligned}$$

essendo

$$M = m + M_S, \quad \mu = \frac{mM_S}{m + M_S}.$$

La quantità M rappresenta la massa totale (massa del Sole più massa del pianeta) del sistema, mentre μ è la cosiddetta massa ridotta. Nel caso in cui $m \ll M_S$, abbiamo $\mu < m$ e $(m - \mu) \ll M_S$, che giustifica il termine massa ridotta.

Una tale trasformazione si applica anche al momento angolare. Infatti, siano \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 la quantità di moto del pianeta e del Sole. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 = m(\mathbf{r}_1 \wedge \dot{\mathbf{r}}_1) + M_S(\mathbf{r}_2 \wedge \dot{\mathbf{r}}_2) \\
&= m \left(\left[\mathbf{R} + \frac{M_S}{m + M_S} \mathbf{r} \right] \wedge \left[\dot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S} \dot{\mathbf{r}} \right] \right) \\
&+ M_S \left(\left[\mathbf{R} - \frac{m}{m + M_S} \mathbf{r} \right] \wedge \left[\dot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S} \dot{\mathbf{r}} \right] \right) \\
&= (m + M_S)(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \frac{mM_S^2 + M_Sm^2}{(m + M_S)^2} (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= (m + M_S)(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \frac{mM_S}{m + M_S} (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= M(\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}) + \mu(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\
&= \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{p},
\end{aligned}$$

dove \mathbf{P} è la quantità di moto del baricentro e \mathbf{p} è quella del moto relativo al baricentro.

La risultante delle forze, $\mathbf{F}_{\text{est.}}$, si trasforma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{est.}} &= m\ddot{\mathbf{r}}_1 + M_S\ddot{\mathbf{r}}_2 \\
&= m \left(\ddot{\mathbf{R}} + \frac{M_S}{m + M_S} \ddot{\mathbf{r}} \right) + M_S \left(\ddot{\mathbf{R}} - \frac{m}{m + M_S} \ddot{\mathbf{r}} \right) \\
&= (m + M_S)\ddot{\mathbf{R}} = M\ddot{\mathbf{R}}.
\end{aligned}$$

Quindi la risultante delle forze causa un'accelerazione del baricentro.

Nello studio del problema dei due corpi facciamo l'ipotesi che il loro baricentro sia fermo:

$$\dot{\mathbf{R}} = 0.$$

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento sul baricentro, l'energia cinetica sarà $T = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2$ ed il momento angolare sarà $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, dove $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$. Supponiamo inoltre che le forze agenti tra i due corpi, \mathbf{F}_{12} e $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, dipendano soltanto dalla distanza tra loro, cioè da $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. In altre parole, la forza \mathbf{F}_{12} , che il Sole esercita sul pianeta, dipende soltanto da r :

$$\mathbf{F}_{12} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r,$$

essendo la $f(r)$ una funzione continua di r e $\hat{\mathbf{e}}_r$ il versore radiale (cioè, proveniente dal baricentro).

Sia $U(r)$ una primitiva della $-f(r)$: $f(r) = -U'(r)$. Allora $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e

$$\begin{aligned}\nabla U(r) &= \frac{\partial}{\partial x}U(r)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}U(r)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}U(r)\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \right\} \\ &= U'(r) \left\{ \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} \right\} \\ &= -f(r)\hat{\mathbf{e}}_r = -\mathbf{F}_{12},\end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_r$ è il versore radiale (con componenti x/r , y/r e z/r). In altre parole, la forza, che il Sole esercita sul pianeta, è conservativa.

3 Forza Gravitazionale

Secondo la teoria della gravitazione di Newton, due corpi esercitano una forza gravitazionale uno sull'altro che è proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra essi. In altre parole,

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{GM_S m}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r,$$

dove G è una costante universale (determinata sperimentalmente per la prima volta da Henry Cavendish nel 1797-98). Siccome

$$M_S m = \mu(m + M_S) = \mu M,$$

abbiamo anche

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{G\mu M}{r^2} = -\nabla U(r),$$

dove

$$U(r) = -\frac{G\mu M}{r}.$$

Per trovare l'orbita del pianeta intorno al Sole, applichiamo la seconda legge di Newton nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$\mu[\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] = -U'(r),$$

dove $\mu r\dot{\theta}^2$ è la forza centrifuga. Siccome la velocità areale $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = (L/2\mu)$ per L il momento angolare, si ha

$$\mu r(\dot{\theta})^2 = \mu r \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 = \frac{L^2}{\mu r^3}.$$

Infine arriviamo all'equazione differenziale

$$\mu\ddot{r} = -\frac{G\mu M}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3}. \quad (\text{VIII.5})$$

Per risolvere la (VIII.5) introduciamo la nuova funzione $u = (1/r)$ e convertiamo le derivate rispetto al tempo in derivate rispetto a θ :

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\theta}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt} r = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} = \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d(1/u)}{d\theta} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= \frac{Lu^2}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo tali espressioni per r e \ddot{r} nella (VIII.5) otteniamo

$$-\frac{L^2 u^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -G\mu M u^2 + \frac{L^2}{\mu} u^3.$$

Oppure:

$$u''(\theta) + u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2}. \quad (\text{VIII.6})$$

La soluzione generale è la seguente:

$$u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{L^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)),$$

dove ε e θ_0 sono costanti arbitrarie. Di conseguenza

$$r(\theta) = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (\text{VIII.7})$$

Introducendo le coordinate x e y tali che l'asse x positivo ha la stessa direzione della semiretta di angolo polare θ_0 (cioè, $x = r \cos(\theta - \theta_0)$ e $y = r \sin(\theta - \theta_0)$), risulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x = r + \varepsilon x = r[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] = \frac{L^2}{G\mu^2 M}.$$

Eliminando la radice quadrata arriviamo all'equazione quadratica

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{L^2}{G\mu^2 M} \right)^2 - 2\varepsilon \frac{L^2}{G\mu^2 M} x + \varepsilon^2 x^2. \quad (\text{VIII.8})$$

Si presentano quattro casi:

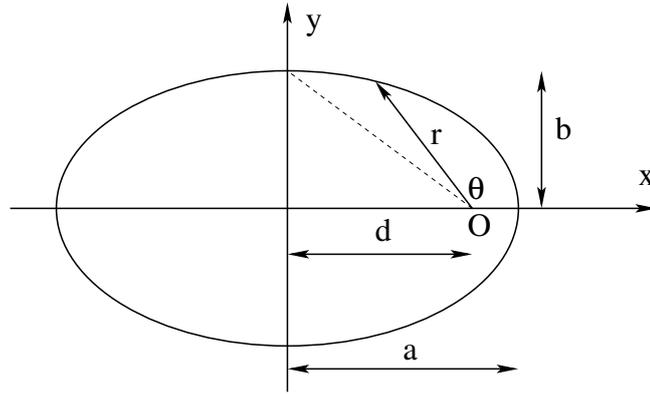


Figura VIII.1: Orbita di un pianeta nel sistema solare.

a. $\varepsilon = 0$: $r(\theta) = [L^2/G\mu^2M]$ è costante. Il moto è una circonferenza attorno al baricentro del Sole e del pianeta.

b. $0 < \varepsilon < 1$: Si ha

$$(1 - \varepsilon^2) \left(x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{L^2}{G\mu^2 M} \right)^2 \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

oppure:

$$\frac{\left(x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1,$$

cioè un'ellisse con semiassi

$$a = \frac{L^2}{G\mu^2 M(1 - \varepsilon^2)}, \quad b = \frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

semidistanza dei fuochi $d = \varepsilon L^2/G\mu^2 M\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ e l'eccentricità $(d/a) = \varepsilon$, mentre il baricentro è uno dei fuochi.

c. $\varepsilon = 1$: In tal caso

$$y^2 = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \left\{ \frac{L^2}{G\mu^2 M} - 2x \right\},$$

una parabola con il baricentro nel fuoco.

d. $\varepsilon > 1$: In tal caso

$$\frac{\left(x - \frac{\varepsilon L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}\right)^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1,$$

un'iperbole con semiassi

$$a = \frac{L^2}{G\mu^2 M(\varepsilon^2 - 1)}, \quad b = \frac{L^2}{G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

semidistanza dei fuochi $d = \varepsilon L^2 / G\mu^2 M\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ e l'eccentricità $(d/a) = \varepsilon$, mentre il baricentro è uno dei fuochi.

e. Per $\varepsilon < 0$ abbiamo le stesse coniche, poiché la trasformazione $(x, \varepsilon) \mapsto (-x, -\varepsilon)$ converte la (VIII.8) in se stessa.

Torniamo al caso $0 < \varepsilon < 1$. Il periodo del moto è

$$\tau = \frac{\pi ab}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{L/2\mu} = \frac{2\pi ab\mu}{L}.$$

Poichè $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$,

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) \mu^2}{L^2} \\ &= a^3 \frac{4\pi^2 \mu^2 (1 - \varepsilon^2)}{L^2} \frac{L^2}{G\mu^2 M (1 - \varepsilon^2)} = a^3 \frac{4\pi^2}{GM}. \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi che $m \ll M_S$ (cioè che $M \simeq M_S$ e $\mu \simeq m$) risultano le tre leggi di Keplero [Astronomia Nova, 1609]:

1. **Prima legge di Keplero:** Le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole che occupa uno dei fuochi. In realtà, le orbite dei pianeti sono ellissi con il baricentro del Sole e del pianeta che occupa uno dei fuochi.
2. **Seconda legge di Keplero:** La velocità areale \dot{A} è costante:

$$\dot{A} = \frac{L}{2\mu}.$$

3. **Terza legge di Keplero:** Il rapporto tra il quadrato del periodo τ e il cubo del semiasse maggiore a è una costante che non dipende dal pianeta:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_S}.$$

4 Vettore di Laplace-Runge-Lenz

Una proprietà caratteristica del problema di Keplero è l'esistenza di un ulteriore vettore che si conserva oltre al momento angolare. Per una forza centrale qualunque si può scrivere la seconda legge di Newton come:

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$$

per un'opportuna funzione $f(r)$. In tal caso

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{L} &= f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \wedge \mu(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{\mu f(r)}{r} [\mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}})] \\ &\stackrel{\text{(VIII.3)}}{=} \frac{\mu f(r)}{r} [(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}] \\ &= \frac{\mu f(r)}{r} [(r\dot{r})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}].\end{aligned}$$

Poichè

$$\frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{r} - r\dot{\mathbf{r}} \stackrel{\text{(VIII.4a)}}{=} [(r\hat{\mathbf{e}}_r) \cdot (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta)]\hat{\mathbf{e}}_r - r(\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

risulta grazie alla conservazione del momento angolare \mathbf{L} :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{L} = -\mu f(r)r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Utilizzando $f(r) = -[G\mu M/r^2]$, si ha:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) = G\mu^2 M\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = G\mu^2 M\dot{\mathbf{e}}_r.$$

Di conseguenza, il cosiddetto *vettore di Laplace-Runge-Lenz*¹

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - G\mu^2 M\hat{\mathbf{e}}_r$$

è costante. Inoltre, essendo ortogonale al piano di moto il momento angolare \mathbf{L} , si ha:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \left[\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - G\mu^2 M\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \right] \cdot \mathbf{L} = \vec{0}.$$

¹Il vettore fu utilizzato in pubblicazioni di Pierre-Simon de Laplace [Traité de Mécanique Celeste, 1799], Carle Runge [Vektoranalysis, 1919] e Wilhelm Lenz [Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung, Zeitschrift für Physik **24**, 197–207 (1924)], ma venne già discusso da J. Hermann in due lettere (1710).

Si vede facilmente che

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} &= (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 M [\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}] \\
&= (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 Mr = -(\mathbf{L} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} - G\mu^2 Mr \\
&= -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) - G\mu^2 Mr = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) - G\mu^2 Mr \\
&= \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} - G\mu^2 Mr = \|\mathbf{L}\|^2 - G\mu^2 Mr.
\end{aligned}$$

Essendo ϑ l'angolo tra \mathbf{r} e la direzione fissa di \mathbf{A} , risulta:²

$$\|\mathbf{A}\| r \cos \vartheta = \|\mathbf{L}\|^2 - G\mu^2 Mr,$$

oppure:

$$\frac{1}{r} = \frac{G\mu^2 M}{\|\mathbf{L}\|^2} \left\{ 1 + \frac{\|\mathbf{A}\|}{G\mu^2 M} \cos \vartheta \right\}.$$

Dunque abbiamo ricavato la prima legge di Keplero, se il modulo di \mathbf{A} è strettamente inferiore di $G\mu^2 M$. In tal caso $\varepsilon = [\|\mathbf{A}\|/G\mu^2 M]$ è l'eccentricità ε (e quindi $\mathbf{A} = \vec{0}$ se e solo se l'orbita del pianeta è una circonferenza) e il vettore di Laplace-Runge-Lenz è diretto dal Sole verso il perielio dell'ellisse (cioè, $\vartheta = 0$). Infine, il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz è dato da:

$$\|\mathbf{A}\| = G\mu^2 M \varepsilon.$$

5 Problema dei Tre Corpi

Il problema di Keplero dei tre corpi riguarda la risoluzione delle equazioni di moti di un sistema di tre masse, m_1 in posizione \mathbf{r}_1 , m_2 in posizione \mathbf{r}_2 e m_3 in posizione \mathbf{r}_3 (con tutte le posizioni relative al centro di massa), che interagiscono tramite la forza gravitazionale tra ogni coppia di particelle. Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}.
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

²Il modulo del vettore di Laplace-Runge-Lenz viene scritto come $\|\mathbf{A}\|$, per non confonderlo con l'area che figura nella discussione della velocità areale.

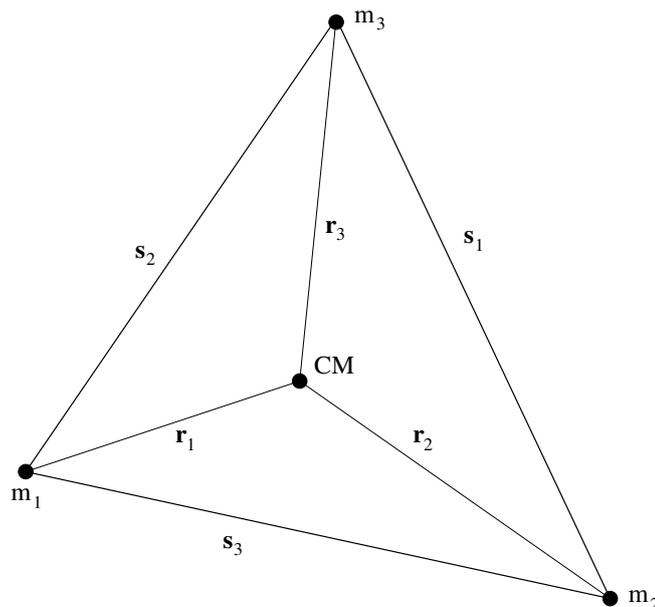


Figura VIII.2: Vettori posizione $\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ e $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ per il problema dei tre corpi.

si ottengono le tre equazioni di moto

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|^3} + m_i \mathbf{G}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{VIII.9})$$

dove

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad \mathbf{G} = G \left(\frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{|\mathbf{s}_3|^3} \right).$$

Dalle tre equazioni accoppiate (VIII.9) non si conosce la soluzione generale, ma soltanto quella che si ottiene in alcuni casi abbastanza elementari. Si osservi che le tre equazioni (VIII.9) sono accoppiate, poichè

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \vec{0}. \quad (\text{VIII.10})$$

Nel caso in cui $\mathbf{G} = \vec{0}$, le equazioni di moto (VIII.9) si disaccoppiano e la (VIII.9) si riduce alla stessa forma del problema di Keplero dei due corpi:

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

con ciascuna delle masse che si muove lungo un'orbita ellittica che giace sullo stesso piano con lo stesso punto focale e lo stesso periodo. Il disaccoppiamento

si verifica quando le masse si trovano ai vertici di un triangolo equilatero.³ Man mano che il moto procede, le equazioni rimangono disaccoppiate e quindi la condizione del triangolo equilatero rimane valida anche se il triangolo cambia orientazione e grandezza. In astronomia una tale situazione consiste nei cosiddetti troiani, asteroidi che condividono la stessa orbita di un pianeta maggiore ma costituiscono un triangolo equilatero con il pianeta maggiore ed il Sole. Sono stati infatti trovati asteroidi troiani per Giove, Marte e Nettuno. Secondo una teoria (da comprovare) la Luna è nata dalla collisione della Terra con un pianeta ipotetico (chiamato Theia oppure Orpheus) che prima formava un triangolo equilatero con la Terra ed il Sole e poi è stato disturbato gravitazionalmente (vedi Wikipedia, Formazione della Luna).

Un altro caso particolare che si può trattare abbastanza bene, è il caso in cui le due masse m_1 e m_2 sono molto grandi e si muovono l'una rispetto all'altra di un moto confinato, mentre la terza, m_3 , molto più piccola, si limita a perturbare il moto delle altre due. In tal caso la terza massa si muove nel campo gravitazionale generato dalle prime due masse. Un esempio è il moto di una navicella spaziale in orbita tra la Terra e la Luna.

³Le equazioni (VIII.10) e $\mathbf{G} = \vec{0}$ valgono simultaneamente se e solo se le tre masse si trovano nei vertici di un triangolo equilatero.

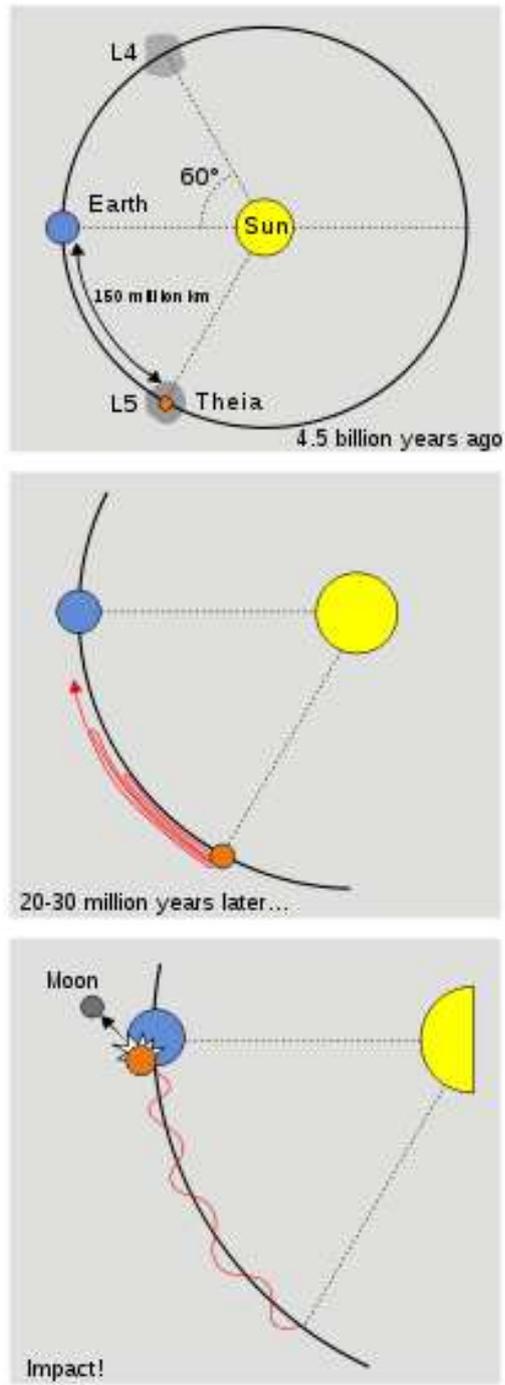


Figura VIII.3: L'ipotetica formazione della Luna. Vedi Wikipedia.

Capitolo IX

Calcolo delle Variazioni e Equazioni di Eulero-Lagrange

In questo capitolo discuteremo il calcolo delle variazioni e la sua applicazione alla formulazione lagrangiana delle equazioni di moto sia per un sistema non vincolato sia per un sistema soggetto a vincoli olonomi. Infine, deriveremo da un'opportuna lagrangiana le equazioni di moto di una particella soggetta alla forza elettromagnetica.

1 Calcolo delle Variazioni

Nella sua forma più semplice il calcolo delle variazioni consiste nel minimizzare il cosiddetto integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y, \dot{y}, t] dt \quad (\text{IX.1})$$

al variare di tutte le funzioni $y = y(t)$ ai valori prefissati $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$. Essenzialmente si cerca un cammino $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) che collega i due punti (t_1, y_1) e (t_2, y_2) e che minimizza l'integrale d'azione S . Uno degli esempi più semplici è il seguente: Fissati nel piano due punti, quale è il cammino più breve che li congiunge? Per poter dare una risposta a tale domanda (dimostrando rigorosamente che tale cammino è il segmento di retta per i due punti dati) occorre trovare la funzione $y(t)$ che minimizza l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dt. \quad (\text{IX.2})$$

essendo $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$.

Supponendo che la f sia di classe C^1 nelle tre variabili y , \dot{y} e t , consideriamo i due cammini $y = y(t)$ e $Y(t) = y(t) + \alpha\eta(t)$ passanti per i punti (t_1, y_1) e (t_2, y_2) , dove α è un parametro. Quindi $y(t_1) = Y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = Y(t_2) = y_2$ e dunque

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0. \quad (\text{IX.3})$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione

$$S = S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(Y, \dot{Y}, t) dt$$

nella (IX.1) rispetto alla variabile α (rispetto alla curva $Y(t)$) otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e le relazioni (IX.3),

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt + \left[\eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dt, \end{aligned}$$

dove la $\eta = \eta(t)$ è una funzione arbitraria di classe C^1 che verifica la (IX.3). Di conseguenza, $S'(\alpha) = 0$ se e solo se il cammino $y = y(t)$ è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (\text{IX.4})$$

Tornando all'esempio (IX.2), sostituiamo $f(y, \dot{y}, t) = \sqrt{1 + (\dot{y})^2}$ nell'equazione di Eulero-Lagrange (IX.4). Poichè la f non dipende da y , risulta che

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}$$

è costante, cioè \dot{y} è costante. In altre parole, la soluzione che minimizza l'integrale d'azione, è il segmento che collega i punti y_1 e y_2 , cioè

$$y(t) = \frac{(t_2 - t)y_1 + (t - t_1)y_2}{t_2 - t_1}.$$

Esempio IX.1 (La brachistocrona) Dati due punti P_1 e P_2 , con il primo punto posto a una quota superiore a quella del secondo punto, quale deve essere la forma che dobbiamo dare a uno scivolo privo di attrito affinché uno slittino

lasciato scivolare dal punto P_1 raggiunga il punto P_2 nel minor tempo possibile? Il tempo di percorrenza da P_1 a P_2 è

$$\text{tempo}(P_1 \mapsto P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

in cui la velocità alla quota generica y vale $v = \sqrt{2gy}$.¹ Poichè

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(y))^2 + 1} dy,$$

dove $x = x(y)$ è la funzione incognita e $(dx/dy) = x'(y)$, risulta

$$\text{tempo}(P_1 \mapsto P_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy,$$

essendo zero la quota in P_1 e $-y_2$ la quota in P_2 . L'equazione di Eulero-Lagrange è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}} = \frac{d}{dy} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}},$$

e, osservando che il primo membro non dipende da x , questa equazione si può scrivere come:

$$\frac{x'(y)}{\sqrt{x'(y)^2 + 1}} = \text{cost.} = \frac{y}{2a},$$

dove la costante è stata chiamata $1/2a$ per motivi di convenienza. Poichè $x(y)$ è una funzione crescente, risulta

$$x'(y) = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Infine, utilizzando la sostituzione $y = a(1 - \cos \theta)$ ($0 < \theta < \pi$), si trova

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \sqrt{\frac{y}{2a - y}} dy = \int_0^\theta \tan\left(\frac{1}{2}\hat{\theta}\right) a \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} \\ &= \int_0^\theta \frac{\sin(\frac{1}{2}\hat{\theta})}{\cos(\frac{1}{2}\hat{\theta})} 2a \sin(\frac{1}{2}\hat{\theta}) \cos(\frac{1}{2}\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= 2a \int_0^\theta \sin^2(\frac{1}{2}\hat{\theta}) d\hat{\theta} = a \int_0^\theta [1 - \cos \hat{\theta}] d\hat{\theta} \\ &= a(\theta - \sin \theta). \end{aligned}$$

¹Iniziando con velocità uguale a zero abbiamo per l'accelerazione, velocità e distanza percorsa al tempo t : g , gt e $s = \frac{1}{2}gt^2$. Quindi $t = \sqrt{2s/g}$ e $v = \sqrt{2gs}$.

Quindi il cammino consiste nella curva rappresentata parametricamente da

$$\begin{aligned}x &= a(\theta - \sin \theta), \\y &= a(1 - \cos \theta),\end{aligned}$$

dove $0 \leq \theta \leq a$. Tali equazioni costituiscono la parametrizzazione di una cicloide.

Esempio IX.2 (Superfici di rotazione) Consideriamo il solido di rotazione

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z), z_1 \leq z \leq z_2\},$$

essendo $g = g(z)$ una funzione positiva di classe C^1 . Allora il volume e l'area della superficie tonda (l'area del bordo senza i dischi contenuti nei piani $z = z_1$ e $z = z_2$) sono date dalle espressioni

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \pi \int_{z_1}^{z_2} g(z)^2 dz, \\ \text{Area} &= 2\pi \int_{z_1}^{z_2} g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz.\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $g(z_1) = g_1$ e $g(z_2) = g_2$. Minimizzando il volume si trova l'equazione di Eulero-Lagrange

$$2\pi g = 0,$$

che non possiede alcuna soluzione soddisfacente le condizioni $g(z_1) = g_1$ e $g(z_2) = g_2$ per $g_1^2 + g_2^2 > 0$. Minimizzando l'area tonda si trova l'equazione differenziale (di Eulero-Lagrange)

$$2\pi \sqrt{1 + (g')^2} = 2\pi \frac{d}{dz} \left(g \frac{g'}{\sqrt{1 + (g')^2}} \right),$$

oppure

$$\sqrt{1 + (g')^2} = g' \frac{g'}{\sqrt{1 + (g')^2}} + g \frac{1}{[1 + (g')^2]^{3/2}} g'',$$

oppure

$$1 + (g')^2 = gg'',$$

un'equazione differenziale non facilmente risolvibile.

Complichiamoci ora la vita minimizzando l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f[y_1, \dots, y_N, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_N, t] dt, \quad (\text{IX.5})$$

dove $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ è un cammino in \mathbb{R}^N che collega i due punti $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, \dots, y_N^1)$ e $\mathbf{y}^2 = (y_1^2, \dots, y_N^2)$. Supponiamo che la f sia di classe C^1 nelle $2N + 1$ variabili $y_1, \dots, y_N, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_N$ e t e perturbiamo il cammino $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{y} + \alpha \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N), \\ \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N), \end{cases}$$

essendo $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{Y}(t_1) = \mathbf{y}^1$ e $\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{Y}(t_2) = \mathbf{y}^2$. Quindi

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0. \quad (\text{IX.6})$$

Calcolando la derivata dell'integrale d'azione $S = S(\alpha)$ nella (IX.1) rispetto alla variabile α otteniamo, utilizzando l'integrazione per parti e la relazione (IX.6)

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left(\eta_j \frac{\partial f}{\partial y_j} + \dot{\eta}_j \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left(\eta_j \frac{\partial f}{\partial y_j} - \eta_j \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt + \sum_{j=1}^N \left[\eta_j \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \eta_j \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} \right) dt, \end{aligned}$$

dove la $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ è una funzione arbitraria di classe C^1 che verifica la (IX.6). Di conseguenza, $S'(\alpha) = 0$ se e solo se il cammino $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ è soluzione delle N equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{IX.7})$$

2 Equazioni di Lagrange

Avendo a disposizione i metodi del calcolo delle variazioni, possiamo intraprendere lo studio della formulazione della meccanica che Joseph Lagrange (1736-1813) (nome di battesimo Giuseppe Lodovico Lagrangia) pubblicò nel 1788 [Mécanique Analytique]. Il vantaggio principale delle equazioni lagrangiane è il fatto che esse mantengono la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Inoltre la formulazione lagrangiana permette di eliminare le reazioni vincolari. In questo modo si semplifica notevolmente la maggior parte dei problemi in quanto le reazioni vincolari sono generalmente incognite.

Consideriamo il caso particolare più semplice: una singola particella sotto l'effetto di una forza conservativa. In tal caso l'energia cinetica della particella vale

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

essendo m la sua massa. L'energia potenziale è $U = U(x, y, z)$. La lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

quindi come *differenza* dell'energia cinetica e di quella potenziale. Cerchiamo ora di minimizzare l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) dt.$$

La traiettoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ che minimizza un tale integrale d'azione deve soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}},$$

che possono anche scriversi come:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}.$$

Tenuto conto dell'espressione dell'energia cinetica si trova

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = m\ddot{y}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = m\ddot{z},$$

ovvero in forma vettoriale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U,$$

che coincide con la seconda legge di Newton per una forza conservativa. In altre parole, la formulazione lagrangiana è equivalente alla seconda legge di Newton.

Abbiamo trovato il seguente **Principio di Hamilton**: *Il moto effettivo di una particella dal punto P_1 al punto P_2 nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti t_1 e t_2 è tale che l'integrale di azione*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

assume su di esso un valore stazionario.

La generalizzazione delle idee precedenti al caso di un sistema costituito da N particelle non vincolate è banale. In tal caso abbiamo

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\dot{\mathbf{r}}_j|^2}_{=\text{energia cinetica}} - \underbrace{U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}_{\text{energia potenziale}}.$$

Il principio di Hamilton ha la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m_j \ddot{x}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} = m_j \ddot{y}_j, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} = m_j \ddot{z}_j,$$

per $j = 1, 2, \dots, N$. Abbiamo trovato N copie della seconda legge di Newton:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = -\nabla_{\mathbf{r}_j} U, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

3 Principio di Hamilton: Sistemi Vincolati

La potenza dell'impostazione lagrangiana si rivela soprattutto nella possibilità di trattare sistemi vincolati. In tal caso basta esprimere la lagrangiana nel numero minimo di coordinate indipendenti e enunciare le equazioni di Eulero-Lagrange.

Si consideri un sistema arbitrario di N particelle occupanti le posizioni \mathbf{r}_j ($j = 1, \dots, N$). I parametri q_1, \dots, q_n si dicono *coordinate generalizzate* (o *lagrangiane*) del sistema se e solo se ogni vettore posizione \mathbf{r}_j si può esprimere in funzione delle q_1, \dots, q_n ed eventualmente del tempo t :

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, \dots, q_n, t), \quad j = 1, \dots, N,$$

e se, viceversa, ogni q_l si può esprimere in funzione delle \mathbf{r}_j ed eventualmente del tempo t :

$$q_l = q_l(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t), \quad l = 1, \dots, n.$$

Inoltre si richiede che il numero n delle coordinate generalizzate sia il minimo numero intero che consente di descrivere il sistema in questo modo. Nello spazio tridimensionale il numero n delle coordinate generalizzate di un sistema di N particelle non può superare $3N$. Per i sistemi vincolati questo numero è sempre minore, a volte anche molto minore.

Il *grado di libertà* di un sistema è il numero di coordinate che possono essere fatte variare indipendentemente in un piccolo spostamento. In altre parole è il numero delle direzioni indipendenti in cui il sistema può muoversi a partire da una configurazione iniziale data. Un sistema di N particelle nello spazio a tre dimensioni si dice *libero* se il grado di libertà è uguale a $3N$ e *vincolato* se è strettamente minore di $3N$.

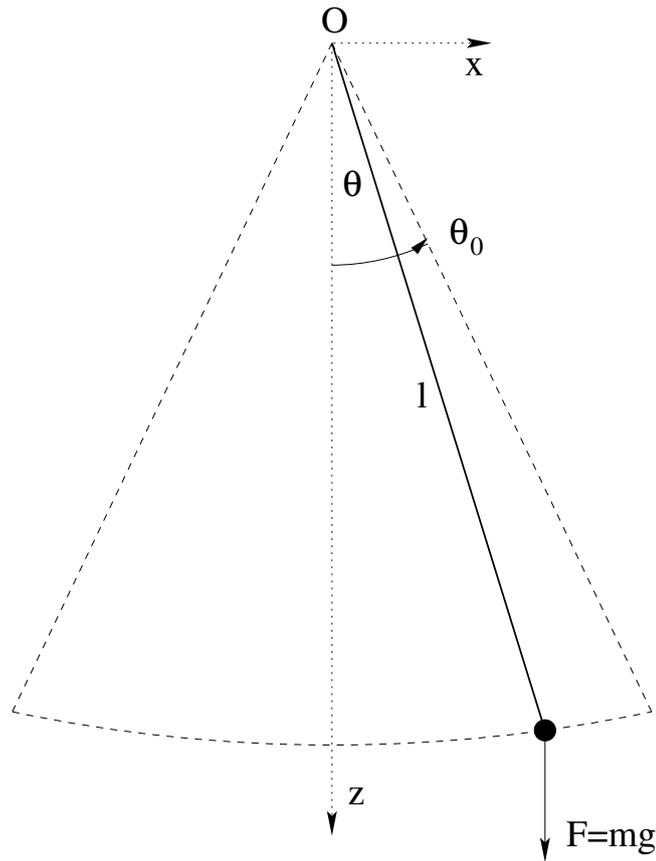


Figura IX.1: Il pendolo semplice.

I sistemi per cui il grado di libertà è uguale al numero minimo n delle sue coordinate lagrangiane si dicono anche *olonomi*. Un sistema olonomo è quindi un sistema con n gradi di libertà che può essere descritto da n coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n . In questo corso non ci occuperemo dei sistemi anolonomi.

Discutiamo ora due esempi dal punto di vista lagrangiano.

Esempio IX.3 (Pendolo semplice) Un piombino di massa m è fissato a un'estremità di un'asta priva di massa, a sua volta fissata all'origine O e libera di ruotare senza attrito nel piano xz . Il piombino è vincolato dall'asta in modo tale che la distanza $l = \sqrt{x^2 + z^2}$ rimane costante. La posizione del piombino è data da

$$x = l \sin \theta, \quad z = l \cos \theta,$$

essendo θ l'angolo tra l'asta e il verticale. L'energia cinetica T e l'energia

potenziale U hanno la seguente forma:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad U = mgl(1 - \cos \theta),$$

essendo g l'accelerazione gravitazionale. Quindi

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta),$$

e l'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$-mgl \sin \theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta},$$

che si può scrivere più semplicemente come

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Conclusione: Abbiamo un singolo grado di libertà e una singola coordinata generalizzata, θ , per cui $\mathbf{r} = (l \sin \theta, 0, l \cos \theta)$ e $\theta = \arctan(x/z)$.

Esempio IX.4 (Problema dei due corpi) La forza che un corpo esercita sull'altro è attrattiva, diretta lungo il segmento congiungente e dipende soltanto dalla loro distanza r . Utilizzando il sistema di riferimento in cui il baricentro delle due masse si trova nell'origine, abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r),$$

essendo μ la massa ridotta e (r, θ) le coordinate polari nel piano del moto. Abbiamo le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}), \\ \mu r \dot{\theta}^2 - U'(r) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}. \end{aligned}$$

La prima equazione di Eulero-Lagrange conduce alla costante di moto $L = \mu r^2 \dot{\theta}$, il momento angolare. Sostituendo $\dot{\theta} = L/\mu r^2$, otteniamo dalla seconda equazione di Eulero-Lagrange

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -U'(r).$$

Nel caso della forza gravitazionale tra il Sole e un pianeta abbiamo

$$U(r) = -\frac{GM\mu}{r},$$

essendo G la costante gravitazionale e M la massa totale. Conclusione: Abbiamo due gradi di libertà e due coordinate generalizzate, r e θ , per cui $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan(y/x)$.

Deriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso di una singola particella vincolata. Per ragioni di semplicità supponiamo che la particella sia vincolata a muoversi mantenendosi sempre su una superficie data. In tal caso la particella ha due gradi di libertà e il suo moto si può descrivere con due coordinate generalizzate indipendenti q_1 e q_2 .

Le forze che possono agire sulla particella sono di due tipi. Il primo tipo comprende le reazioni vincolari (che in generale non sono conservative): indicheremo con \mathbf{F}_v la risultante delle forze vincolari agenti sulla particella, nel nostro caso normale alla superficie. Il secondo tipo comprende tutte le forze rimanenti agenti sulla particella. La loro risultante è supposta conservativa:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t),$$

dove il potenziale U può dipendere dal tempo t . La forza totale sulla particella è $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}$.

Al solito la lagrangiana è definita come

$$\mathcal{L} = T - U,$$

dove l'energia potenziale è dovuta alle sole forze non vincolari. Vedremo che la formulazione lagrangiana permetterà di eliminare le forze vincolari dalle incognite del problema.

Indicheremo con $\mathbf{r}(t)$ la traiettoria effettiva della particella, essendo $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ le posizioni iniziale e finale della particella, ambedue supposte prefissate. Indichiamo con $\mathbf{R}(t)$ un qualunque moto variato passante per gli stessi punti. Convieni scrivere

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ è un vettore infinitesimale che congiunge i punti $\mathbf{r}(t)$ del moto effettivo con quelli $\mathbf{R}(t)$ nel moto variato. Assumeremo che entrambi le traiettorie $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ appartengano alla superficie vincolare. Poichè entrambi le traiettorie $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ congiungono gli stessi due punti iniziale e finale, si ha $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$.

Indichiamo con S l'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) dt$$

calcolato lungo un qualunque cammino $\mathbf{R}(t)$ sulla superficie vincolare e indichiamo con S_0 il valore che esso assume lungo il moto effettivo $\mathbf{r}(t)$. Studiamo l'andamento della differenza

$$\delta S = S - S_0$$

se $|\boldsymbol{\varepsilon}| \rightarrow 0$. La differenza δS è l'integrale della differenza tra le lagrangiane calcolate lungo i due moti:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

Poichè

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}, t), \quad \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{R}}|^2 - U(\mathbf{R}, t),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(|\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2 - |\dot{\mathbf{r}}|^2) - [U(\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}, t) - U(\mathbf{r}, t)] \\ &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$ contiene la somma di tre termini che, nel dividere da $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2$, $|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2$ e $|\boldsymbol{\varepsilon}| |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$, rispettivamente, rimangono limitate se $|\boldsymbol{\varepsilon}| + |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|$ tende a zero. Dunque

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U] dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla U] dt + [m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}]_{t=t_1}^{t_2} + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot [m\ddot{\mathbf{r}} + \nabla U] dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2), \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato l'integrazione per parti e tenuto conto che $\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) = 0$. Poichè $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} = -\nabla U$, risulta

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}_v dt + O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2).$$

Tranne un termine di tipo $O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2)$, il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}$ appartiene al piano tangente alla superficie, mentre la forza vincolare \mathbf{F}_v è ortogonale alla superficie. Quindi

$$\delta S = O(|\boldsymbol{\varepsilon}|^2),$$

e l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto effettivo.

Abbiamo dimostrato, in modo non troppo rigoroso, la validità del principio di Hamilton, ossia che l'integrale d'azione è stazionario lungo il moto che la particella effettivamente compie. Nella dimostrazione non sono ammessi tutti gli spostamenti ma soltanto quelli tra due moti appartenenti alla superficie. Questo fatto significa che non sussistono le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto alle

tre coordinate cartesiane, ma solo rispetto alle coordinate generalizzate. Nel nostro caso ($n = 2$ vincoli e $n = 2$ coordinate generalizzate q_1 e q_2) possiamo scrivere l'integrale d'azione in funzione di q_1 e q_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt$$

e questo deve essere stazionario per *ogni* variazione di q_1 e q_2 rispetto al moto effettivo $[q_1(t), q_2(t)]$. Si verificano le equazioni de Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = 0.$$

È abbastanza semplice generalizzare la derivazione del principio di Hamilton ad un sistema vincolato di N particelle. *Un sistema olonomo con n gradi di libertà (e quindi n coordinate generalizzate (q_1, \dots, q_n) , soggetto a forze non vincolari il cui risultante è derivabile da un'energia potenziale $U(q_1, \dots, q_n, t)$, è completamente determinato dalle n equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (\text{IX.8})$$

Esempio IX.5 (Moto su una superficie cilindrica) Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi senza attrito sulla superficie cilindrica $x^2 + y^2 = R^2$ sotto l'effetto della forza centrale $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, essendo k una costante positiva. Utilizzando le coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , dove $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, l'energia cinetica T e quella potenziale U valgono

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2).$$

Quindi la lagrangiana vale

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2),$$

essendo la particella vincolata a muoversi sulla superficie $\rho = R$. Scegliamo ora le coordinate generalizzate z e θ . Risultano le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\implies -kz = m\ddot{z}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &\implies \frac{d}{dt} mR^2\dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono del tipo $z = A \cos(\omega t - \delta)$ e $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$, essendo $\omega = \sqrt{k/m}$ e $mR^2\omega_0$ il momento angolare attorno all'asse z .

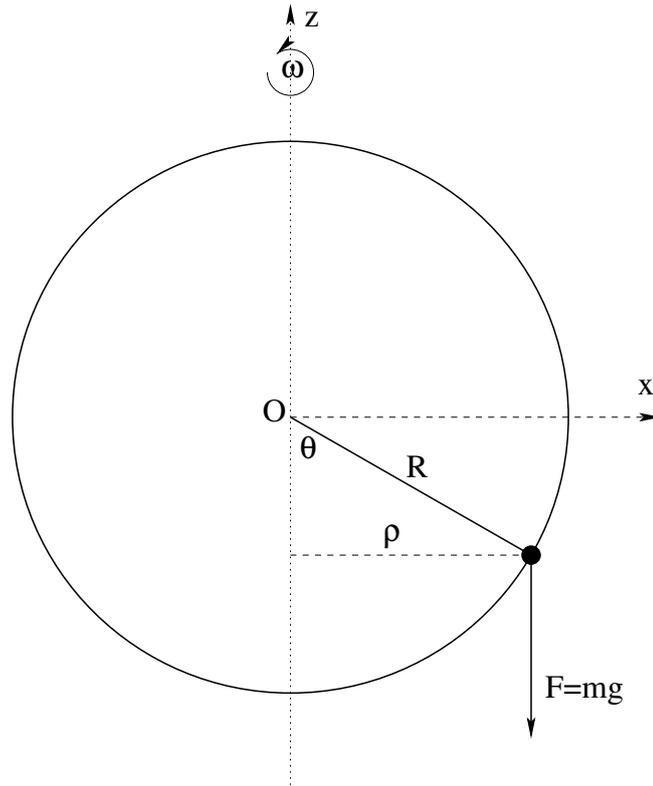


Figura IX.2: La biglia su una guida rotante.

Esempio IX.6 (Biglia su una guida rotante) Una biglia di massa m è vincolata a una guida costituita da un filo di ferro circolare di raggio R . La guida appartiene a un piano verticale ed è fatta ruotare attorno al suo diametro verticale con velocità angolare ω . La posizione della biglia sulla guida è determinata dall'angolo θ misurato a partire della verticale. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR(1 - \cos \theta),$$

a cui corrisponde l'equazione di Eulero-Lagrange

$$mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = mR^2\ddot{\theta}.$$

Dividendo per mR^2 , otteniamo l'equazione del moto

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta.$$

Moltiplicando per $2\dot{\theta}$ e integrando otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta),$$

dove la costante di integrazione $\dot{\theta}_0$ verifica $|\dot{\theta}_0| \geq \sqrt{2g/R}$. Ne segue

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2(1 - \cos 2\theta) - \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)}},$$

e il calcolo della primitiva $t(\theta)$ conduce ad un cosiddetto integrale ellittico (non esprimibile analiticamente).

4 Momenti generalizzati

In un sistema con n coordinate generalizzate q_i ($i = 1, \dots, n$) le quantità $F_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial q_i$ si dicono *forze generalizzate* e le quantità $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ *quantità di moto generalizzate* o *momenti generalizzati*. Ciò consente di riformulare le n equazioni di Eulero-Lagrange come fossero n componenti della seconda legge di Newton:

$$F_i = \frac{d}{dt}p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

In particolare, se la lagrangiana \mathcal{L} non dipende da una certa coordinata q_i , allora $F_i = (\partial\mathcal{L}/\partial q_i) = 0$ e la quantità di moto generalizzata p_i si conserva. Tali coordinate generalizzate si dicono *ignorabili* o *cicliche*.

Un caso interessante è il problema del proiettile soggetto solamente alla forza gravitazionale. La sua energia potenziale è $U = mgz$, e la sua lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

La forza generalizzata è proprio quella usuale. La quantità di moto generalizzata è quella usuale. Poichè \mathcal{L} non dipende da x e y , si conservano le quantità di moto p_x e p_y .

Per motivi di efficienza scegliamo le coordinate generalizzate in modo che la lagrangiana dipende dal minor numero di coordinate generalizzate q_i , per poter derivare il maggior numero di leggi di conservazione per le quantità di moto generalizzate.

Calcoliamo la derivata della lagrangiana rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=p_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i \} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui la lagrangiana \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo, cioè nel caso in cui $(\partial \mathcal{L} / \partial t) = 0$, si può concludere che la cosiddetta *hamiltoniana*

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

è una quantità conservata.

Dimostriamo ora che l'hamiltoniana \mathcal{H} coincide con l'energia totale del sistema. Poichè $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n)$, $i = 1, \dots, N$, si ottiene l'identità

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Perciò

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

essendo

$$A_{jk} = A_{jk}(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Dunque, utilizzando il fatto che $A_{jk} = A_{kj}$,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{jj} \dot{q}_j^2 + \sum_{j < k} A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \\ &= A_{ii} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{k > i} A_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j < i} A_{ji} \dot{q}_j \\ &= \sum_{l=1}^n A_{il} \dot{q}_l. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^n A_{il} \dot{q}_l \right) \dot{q}_i = \sum_{i,l=1}^n A_{il} \dot{q}_i \dot{q}_l = 2T.$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - [T - U] = T + U,$$

che è l'energia totale.

5 Lagrangiana per la Forza Magnetica

Finora abbiamo introdotto la formulazione lagrangiana esclusivamente per i sistemi il cui risultante delle forze non vincolari è conservativo. Ponendo $\mathcal{L} = T - U$, si è poi passati alle equazioni di Eulero-Lagrange, considerate un sistema completo e minimale (in termini del numero delle equazioni) di equazioni che descrivono il moto del sistema. Ciò non ci impedisce di introdurre la lagrangiana come qualsiasi funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

tale che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange descrivono completamente e in modo minimale il moto del sistema, anche se non esistesse il potenziale U .

Un esempio significativo è il seguente: Si consideri una particella di massa m e carica elettrica q in moto in un campo elettrico \mathbf{E} e magnetico \mathbf{B} . Sulla particella agisce la forza (non conservativa) di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right),$$

dove \mathbf{v} è la velocità della particella e c è la velocità della luce. La seconda legge di Newton assume la forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (\text{IX.9})$$

Possiamo trovare, in modo non unico,² il potenziale elettrico $V(\mathbf{r}, t)$ e quello magnetico $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tali che

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

²I campi elettrico \mathbf{E} e magnetico \mathbf{B} non cambiano sotto le trasformazioni $V \mapsto V + \text{cost.}$ e $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \phi$ per qualunque ϕ che non dipende da t .

Definiamo la funzione lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - q \left(V - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - qV + \frac{q}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z).\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right\} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &\implies -q \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c} \left\{ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{z} + \frac{q}{c} A_z \right).\end{aligned}$$

Queste tre equazioni conducono alle seguenti:

$$\begin{aligned}-q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{q}{c} \left[\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] &= m\ddot{x} + \frac{q}{c} \left[\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right], \\ -q \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{q}{c} \left[\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] &= m\ddot{y} + \frac{q}{c} \left[\frac{\partial A_y}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right], \\ -q \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{q}{c} \left[\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] &= m\ddot{z} + \frac{q}{c} \left[\frac{\partial A_z}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right].\end{aligned}$$

Queste ultime sono equivalenti a:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{q}{c} \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \\ m\ddot{y} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{q}{c} \dot{x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \\ m\ddot{z} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \dot{x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{q}{c} \dot{y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right),\end{aligned}$$

oppure:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x, \\ m\ddot{y} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_y, \\ m\ddot{z} &= -q \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_z,\end{aligned}$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -q \left(\nabla V + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} [\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})],$$

la quale implica la (IX.9).

Si consideri il caso particolare in cui $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ è costante e $V \equiv 0$. In tal caso si scelga

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0) = \frac{1}{2}Br\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

essendo $\hat{\mathbf{e}}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ il versore tangenziale. Utilizzando le coordinate cilindriche, risulta facilmente

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}, \quad |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2,$$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}Br(\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{2}Br^2\dot{\theta},$$

essendo $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ e \mathbf{k} ortogonali tra loro. Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c}r^2\dot{\theta},$$

in cui risultano cicliche le variabili θ e z . Quindi le quantità di moto generalizzate

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{qB}{2c}r^2, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

vengono conservate. Ci rimane una singola equazione di Eulero-Lagrange non banale:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \implies m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{qB}{c}r\dot{\theta},$$

oppure:

$$m\ddot{r} = mr \left(\frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc} \right)^2 + \frac{qB}{c}r \left(\frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc} \right) = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4mc^2}.$$

Moltiplicando ambedue le parti da $2\dot{r}/m$ e calcolando la primitiva, risulta per un'opportuna costante positiva γ :

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} - \frac{q^2 B^2 r^2}{4m^2 c^2}.$$

Scegliendo $\gamma > 0$ tale che il secondo membro si annulla per $r = r_0$, si ottiene il moto lungo l'elica $r = r_0$, $\dot{\theta} = \text{cost.}$ e $\dot{z} = \text{cost.}$ Uno dei moti consentiti dal sistema lagrangiana è l'elica attorno al campo magnetico costante \mathbf{B} .

6 Moltiplicatori di Lagrange

Finora abbiamo discusso la formulazione lagrangiana di un sistema olonomo vincolato sempre nello stesso modo, utilizzando i vincoli per arrivare ad un minor numero di coordinate generalizzate. Una tale riduzione del numero delle variabili non è sempre facile da eseguire. In certi casi potrebbe essere opportuno utilizzare un sistema con più variabili, sfruttando alcuni vincoli esplicitamente.

Consideriamo, per esempio, un sistema con soltanto tre coordinate cartesiane x, y, z , legate da un'equazione del vincolo del tipo

$$f(x, y, z) = 0.$$

Al posto della lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ si consideri la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda(t)f(x, y, z),$$

essendo $\lambda(t)$ un cosiddetto *moltiplicatore di Lagrange*. Al posto delle solite equazioni di Eulero-Lagrange, abbiamo le seguenti equazioni modificate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &= 0, \end{aligned}$$

più il vincolo $f(x, y, z) = 0$.

Consideriamo il caso di una singola particella soggetta ad una forza conservativa. La lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z),$$

e le equazioni di moto sono

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= m\ddot{x}, \\ -\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= m\ddot{y}, \\ -\frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= m\ddot{z}, \end{aligned}$$

o, in forma vettoriale,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + \lambda \nabla f.$$

Quindi la forza vincolare vale $\mathbf{F}_v = \lambda \nabla f$ e risulta essere ortogonale alla superficie di equazione $f(x, y, z) = 0$.

Nel caso di due vincoli, $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$, si derivano le equazioni di Eulero-Lagrange dalla lagrangiana ampliata

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda(t)f(x, y, z) + \mu(t)g(x, y, z),$$

essendo λ e μ due moltiplicatori di Lagrange.

Esempio IX.7 (Pendolo semplice usando i moltiplicatori) Si consideri la lagrangiana (confronta con l'Esempio IX.3)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

sotto i vincoli $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$ e $g(x, y, z) = y = 0$. Partendo dalla lagrangiana ampliata

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(x^2 + z^2 - l^2) + \mu y,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= m\ddot{x}, \\ \mu &= m\ddot{y}, \\ -mg + 2\lambda z &= m\ddot{z}, \end{aligned}$$

più i vincoli $x^2 + z^2 = l^2$ e $y = 0$. Il vincolo $y = 0$ ci consente di eliminare l'equazione per y e di arrivare al sistema di tre equazioni

$$2\lambda x = m\ddot{x}, \quad -mg + 2\lambda z = m\ddot{z}, \quad x^2 + z^2 = l^2.$$

Moltiplicando la prima equazione per \dot{x} , la seconda per \dot{z} e calcolando la somma si ottiene

$$2\lambda(x\dot{x} + z\dot{z}) = m[\dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z} + g\dot{z}],$$

e quindi

$$\lambda(\underbrace{x^2 + z^2}_{=l^2}) = \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}_{=T} + \underbrace{mgz}_{=U} + \text{cost.}$$

Allora la costante vale $\lambda l^2 - \mathcal{H}$, essendo \mathcal{H} l'energia totale del sistema.

Esempio IX.8 (Macchina di Atwood) Si consideri una macchina di Atwood formata da due masse, m_1 e m_2 , collegate da un filo privo di massa e inestendibile che passa per una puleggia, priva di attrito. Essendo la lunghezza del filo, l , fissa, la massa m_1 si trova al di sotto di una distanza x da un opportuno livello di

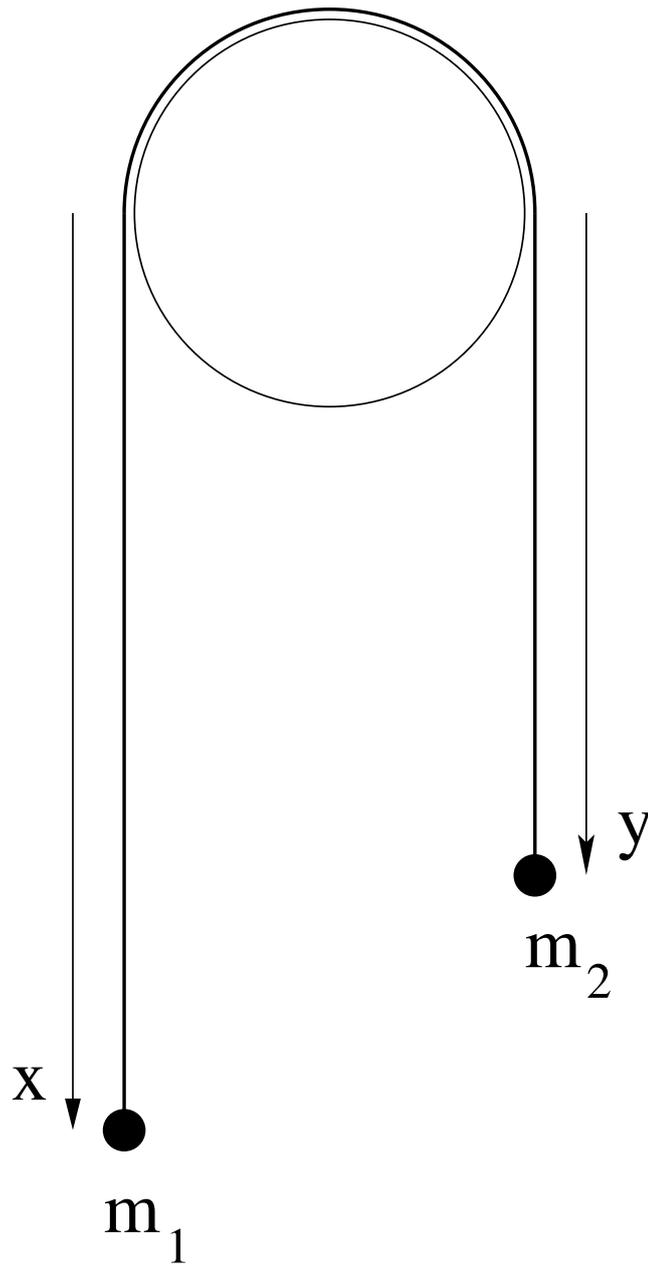


Figura IX.3: Macchina di Atwood.

riferimento e la massa m_2 al di sotto di una distanza y da questo livello, mentre $x + y = \text{cost}$. Allora la lagrangiana ampliata è

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2}_{=T} + \underbrace{(m_1gx + m_2gy)}_{=-U} + \lambda(x + y - L),$$

dove $L = l - \pi R$ (essendo R il raggio della puleggia). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m_1 g + \lambda &= m_1 \ddot{x}, \\ m_2 g + \lambda &= m_2 \ddot{y}, \end{aligned}$$

accompagnate dal vincolo $x + y = L$. Calcolando la somma delle due equazioni di Eulero-Lagrange e sfruttando il fatto che $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, otteniamo

$$0 = \ddot{x} + \ddot{y} = \frac{m_1 g + \lambda}{m_1} + \frac{m_2 g + \lambda}{m_2},$$

quindi $\lambda = -2gm_1m_2/(m_1 + m_2)$. Di conseguenza,

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \quad \ddot{y} = \frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Integrando due volte, troviamo le soluzioni

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2, \quad y(t) = L - x_0 - \dot{x}_0 t - \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2.$$

Alternativamente, eliminando la variabile y , $y = L - x$, si può partire dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$$

e arrivare all'equazione di Eulero-Lagrange

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{x},$$

che conduce alla stessa soluzione $x(t)$ già trovata. La $y(t)$ si trova poi dall'equazione $y(t) = L - x(t)$.

Appendice A

Calcolo Differenziale in Più Variabili

In quest'appendice vengono discusse la derivazione parziale e direzionale, la differenziabilità e i campi vettoriali conservativi e solenoidali.

1 Derivate parziali e direzionali

Sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita in un insieme aperto D di \mathbb{R}^n . Per semplicità fissiamo l'attenzione ad $n = 3$, ricordando che tutto si può generalizzare a più dimensioni.

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di D . Allora la *derivata parziale* di f in P_0 rispetto alla variabile x è il limite (se esiste finito)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.$$

Analogamente si definiscono $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0, z_0)$ e $(\partial f / \partial z)(x_0, y_0, z_0)$.

Sia \mathbf{n} un versore (cioè, $\|\mathbf{n}\| = 1$). Allora la *derivata direzionale* della funzione f nel punto P_0 *nella direzione* \mathbf{n} è definita come il limite (se esiste finito)

$$D_{\mathbf{n}}f(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\mathbf{n}) - f(P_0)}{h}.$$

Allora le derivate direzionali di f nelle direzioni \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} sono le derivate parziali di f rispetto ad x , y e z .

Supponiamo che la funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ammetta tutte le derivate parziali nel punto P_0 . Allora il vettore le cui componenti sono le derivate parziali della f in P_0 si chiama *gradiente* della funzione f :

$$\text{grad } f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k}.$$

Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, se esiste un **operatore lineare** $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(P_0 + \mathbf{h}) - f(P_0) = L\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0,$$

per ogni incremento $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ con $P_0 + \mathbf{h} \in D$. Il simbolo $o(\|\mathbf{h}\|)$ significa che il resto è infinitesimo di ordine superiore ad $\|\mathbf{h}\|$ per $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$. In altre parole, significa che il resto diviso da $\|\mathbf{h}\|$ tende a zero per $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$. L'operatore lineare L è lineare nella variabile \mathbf{h} e dipende dal punto P_0 . Dunque $L\mathbf{h}$ viene rappresentato dal prodotto matriciale della riga 1×3 L per la colonna 3×1 \mathbf{h} . Si vede subito che

$$L\mathbf{h} = \text{grad } f(P_0) \cdot \mathbf{h}.$$

Dunque la differenziabilità della f in \mathbb{R}^3 implica l'esistenza delle derivate parziali di f in P_0 . Il contrario non vale necessariamente. La derivata direzionale di f in P_0 nella direzione \mathbf{n} è data da

$$\text{grad } f(P_0) \cdot \mathbf{n}.$$

Data la funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sufficientemente liscia (ad esempio, di classe C^1), si può dimostrare che il gradiente di f in P_0 è un vettore che è ortogonale alla superficie di livello

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = f(P_0)\}.$$

Il *piano tangente* in P_0 a questa superficie di livello passa per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed è ortogonale a $\text{grad } f(P_0)$, quindi ha l'equazione

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \text{grad } f(P_0) = 0.$$

In altre parole, la sua equazione è data da

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0.$$

Il gradiente di f ha il verso rivolto verso la parte dove la funzione f cresce.

2 Nabla ∇

È utile introdurre il *vettore simbolico* ∇ :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

L'operatore ∇ opera **formalmente** su una funzione scalare f . Il gradiente di f si può scrivere nella forma

$$\nabla f = \text{grad } f.$$

Sia $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione di classe C^1 con componenti F_x, F_y e F_z . Quindi le componenti si definiscono come

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_x(\mathbf{x})\vec{i} + F_y(\mathbf{x})\vec{j} + F_z(\mathbf{x})\vec{k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Si definisce la *matrice jacobiana* J della \mathbf{F} come

$$J\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Allora la *divergenza* della \mathbf{F} viene definita come

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

quindi la divergenza della \mathbf{F} è una funzione scalare. Il *rotore* della \mathbf{F} viene definita come

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Conviene ricordare la regola mnemonica

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Supponiamo che $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia di classe C^2 . Allora vale il teorema di Schwartz: le derivate parziali delle componenti della \mathbf{F} di secondo ordine non dipendono dall'ordine di derivazione parziale. In tal caso,

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\text{rot grad } f = \nabla \wedge \nabla f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{k} = \vec{0};$$

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

dove

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

si chiama *operatore di Laplace* o *Laplaciano*.

Ricaviamo ora alcune regole prodotto (per funzioni di classe C^1):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot}(f\mathbf{F}) &= \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{F} + f \operatorname{rot} \mathbf{F}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Proposizione A.1 Sia $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^2 . Allora

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F},$$

dove $\Delta \mathbf{F}$ è il vettore con componenti ΔF_x , ΔF_y e ΔF_z .

Dimostrazione. Sia

$$\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \right) \vec{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

Ciò viene scritto nella forma

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \vec{k} - \left[\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right] \vec{i} \\ &\quad - \left[\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right] \vec{j} - \left[\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right] \vec{k} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - [(\Delta F_x) \vec{i} + (\Delta F_y) \vec{j} + (\Delta F_z) \vec{k}],\end{aligned}$$

il che dimostra la proposizione. \square

3 Potenziali e potenziali vettoriali

a. Campi vettoriali conservativi e irrotazionali. Sia $\mathbf{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ un campo vettoriale continuo (mecc.: una forza continua). Allora \mathbf{F} si dice *conservativo* se esiste un cosiddetto *potenziale* U di classe C^1 tale che

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U.$$

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se l'integrale curvilineo

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

non dipende dalla traiettoria che connette il punto 1 al punto 2, ma soltanto dai punti 1 e 2. In meccanica quest'integrale curvilineo rappresenta il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} per lo spostamento da 1 a 2. In particolare, il campo vettoriale \mathbf{F} è conservativo se e solo se l'integrale curvilineo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

per ogni traiettoria chiusa. In meccanica quest'integrale curvilineo rappresenta il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} per uno spostamento lungo una traiettoria chiusa.

Sia \mathbf{F} un campo vettoriale conservativo di classe C^1 . In tal caso il corrispondente potenziale è una funzione di classe C^2 . Inoltre,

$$\text{rot } \mathbf{F} = -\text{rot grad } U = \vec{0}.$$

In altre parole, un campo vettoriale conservativo di classe C^1 è *irrotazionale*. Il contrario (cioè, ogni campo vettoriale di classe C^1 , che è irrotazionale, è conservativo) vale soltanto nei domini stellati oppure, più generalmente, nei domini semplicemente connessi.¹

b. Campi vettoriali con potenziale vettore e campi vettoriali solenoidali. Sia $\mathbf{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ un campo vettoriale continuo. Si dice che il campo vettoriale $\mathbf{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ di classe C^1 è un *potenziale vettore* di \mathbf{F} se

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

¹Un dominio D si dice *semplicemente connesso* se per ogni funzione continua (curva) $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$ e per ogni punto $\mathbf{x}_0 \in D$ esiste una funzione continua (omotopia) $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tale che $H(t, 0) = \varphi(t)$ e $H(t, 1) = \mathbf{x}_0$ per ogni $t \in [0, 1]$. In altre parole, se ogni curva in D può essere deformata in un singolo punto in modo continuo.

Un campo vettoriale \mathbf{F} ha un potenziale vettore se e solo se il suo flusso attraverso una superficie chiusa S in D si annulla, cioè se e solo se

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0,$$

dove \mathbf{n} è il versore normale esterno sulla superficie S .

Se \mathbf{F} è di classe C^1 e quindi \mathbf{A} è di classe C^2 , allora

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

In altre parole, ogni campo vettoriale di classe C^1 in possesso di un potenziale vettore è *solenoidale* nel senso che si annulla la sua divergenza. Il contrario (cioè, ogni campo vettoriale solenoidale di classe C^1 ha un potenziale vettore) vale soltanto nei domini aperti D che hanno la proprietà che il complementare della sua chiusura, $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, è connesso.²

²In altre parole, si richiede che D non contenga dei buchi aperti. Si richiede che ogni superficie in D può essere deformata in modo continuo in un singolo punto.

Appendice B

Pendolo Semplice

a. Il pendolo semplice senza approssimazioni. Il pendolo semplice consiste in una massa m sottoposto ai vincoli

$$\sqrt{x^2 + z^2} = l, \quad y = 0.$$

La variabile θ è definita dalle equazioni

$$z = l \cos(\theta), \quad x = l \sin(\theta).$$

L'energia cinetica T e il potenziale sono date da

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad U = -mgl \cos \theta,$$

dove l è la lunghezza del pendolo e g è l'accelerazione gravitazionale. Utilizzando la conservazione dell'energia totale si ha

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = -mgl \cos(\alpha), \quad (\text{B.1})$$

dove $\theta(t_\alpha) = \alpha$ e $\dot{\theta}(t_\alpha) = 0$ per un opportuno $t_\alpha > 0$. Quindi

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}.$$

Supponendo che $\dot{\theta} > 0$, otteniamo

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)},$$

il che implica

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} t_\alpha.$$

Poichè l'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = t_\alpha$ occupa soltanto un quarto del periodo p , otteniamo

$$p = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\alpha)}}.$$

Sostituendo

$$\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin \phi,$$

otteniamo

$$p = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin^2(\phi)}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{1}{2}\alpha\right), \quad (\text{B.2})$$

dove, per $0 \leq k < 1$,

$$K(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}}$$

è il cosiddetto *integrale ellittico di prima specie*.

Facendo tendere $\alpha \rightarrow 0^+$ e utilizzando $K(0) = \arcsin(1) = \frac{1}{2}\pi$, si trova il limite $p \approx 2\pi\sqrt{l/g}$. Un tale limite si ricava anche approssimando l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta),$$

ottenuta derivando la (B.1) rispetto al tempo t , dall'equazione

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta.$$

Quest'ultima ha come soluzione

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l}) + \dot{\theta}_0 \frac{\sin(t\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}} = \alpha \cos((t - t_\alpha)\sqrt{g/l}),$$

dove $\theta_0 = \theta(0)$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$, $\alpha = \theta(t_\alpha)$ e $\dot{\theta}(t_\alpha) = 0$.

b. Integrale ellittico di prima specie. Nel 1799 Carl Friedrich Gauss scoprì un metodo per calcolare gli integrali ellittici numericamente. Partendo da due numeri positivi a_0 e b_0 tali che $0 < b_0 \leq a_0$, si costruiscono le successioni $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ nel seguente modo:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_n}. \quad (\text{B.3})$$

In tal modo

$$0 < b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \dots \leq a_1 \leq a_0,$$

mentre

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

Sia $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Allora

$$0 \leq b \leq a, \quad a - b = \frac{1}{2} \frac{(a - b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2},$$

il che implica $a = b$. In altre parole,

$$M(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

La cosiddetta *media aritmetico-geometrica* $M(a, b)$ ha le seguenti proprietà:

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b), \quad M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Quindi

$$M(1, b) = M\left(\frac{1}{2}(1+b), \sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}(1+b)M\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1+b}\right).$$

Teorema B.1 Per $x > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(1, x)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1-x^2) \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} K(\sqrt{1-x^2}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dimostrazione. Per $a, b > 0$ definiamo $T(a, b)$ come

$$T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)}}.$$

Allora

$$T(a, a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]}} = \frac{1}{a}.$$

Inoltre, sostituendo $t = b \tan(\theta)$ si ha

$$T(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

Sostituiamo ora $u = \frac{1}{2}(t - [ab/t])$:

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2t}(t + [ab/t])dt, \\ u^2 + [\frac{1}{2}(a+b)]^2 &= (t^2 + a^2)(t^2 + b^2), \\ u^2 + (\sqrt{ab})^2 &= [\frac{1}{2}(t + [ab/t])]^2, \end{aligned}$$

il che conduce all'identità

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2 + [\frac{1}{2}(a+b)]^2)(u^2 + (\sqrt{ab})^2)}} \\ &= T(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}). \end{aligned}$$

Per $x > 0$ definiamo a_n e b_n ricorsivamente dalla (B.3), dove $a_0 = x$ e $b_0 = 1$. Si verifica facilmente che per ogni $x > 0$ si ha:

$$\frac{1}{M(1, x)} = T(M(1, x), M(1, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n, b_n) = T(a_0, b_0) = T(1, x),$$

il che implica la (B.4). □

Infine ritorniamo all'espressione (B.2) per il periodo p del pendolo. Utilizzando la (B.4) esso si scrive nella seguente forma finale:

$$p = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{M(1, \cos \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Per $\alpha \rightarrow 0^+$ ne risulta la solita formula approssimativa

$$p \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Appendice C

Esercizi:I

Cinematica

1. Un treno parte da una stazione con accelerazione costante $0,125 \text{ m/sec}^2$ fino a raggiungere la velocità di regime di 90 km/ora , indi il moto procede uniforme; la stazione da raggiungere dista 10 km e prima di arrivarvi il treno viene frenato con una decelerazione costante di $0,833 \text{ m/sec}^2$. Determinare lo spazio e il tempo richiesto per la fase di avviamento e quella di frenata, la durata totale del percorso e infine la velocità media.
2. Ammesso, come si dimostrerà in dinamica, che un punto materiale, soggetto solo al suo peso, si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione $g \sin \alpha$ se obbligato a scendere lungo una retta inclinata di α rispetto all'orizzonte (meglio la retta di pendio di un piano inclinato di α) si dimostri che il tempo necessario per percorrere, partendo dalla quiete, una corda di un cerchio verticale con un estremo nel suo punto più basso A è indipendente dall'inclinazione della corda (Galileo).
3. Trovare l'inclinazione della retta di più rapida discesa da un punto B di una parabola (con asse verticale e concavità verso l'alto) al suo fuoco F .
4. Un punto si muove con accelerazione costante a e all'istante $t = \tau$ la sua velocità è u , d lo spazio percorso. Scrivere l'equazione del moto.
5. Due punti mobili su una stessa retta partono dallo stesso luogo, con accelerazioni costanti uguali, con velocità iniziali nulle, l'uno all'istante τ , l'altro all'istante τ . Dimostrare che la distanza fra i due punti va crescendo linearmente col tempo.
6. Due punti si muovono sulla stessa retta, nello stesso verso e con la stessa accelerazione a , il primo parte dall'origine con velocità v_0 , l'altro dal punto

distante d dall'origine e con velocità iniziale nulla. Trovare l'istante e il luogo in cui avviene l'incontro fra i due punti.

7. Un punto si muove di moto naturalmente accelerato con accelerazione a . All'istante τ viene, con un urto, raddoppiata la sua velocità. Scrivere l'equazione del moto per $t > \tau$.
8. Determinare l'equazione del moto armonico di pulsazione ω , sapendo che la sua ascissa iniziale è s_0 , la sua velocità v_0 .
9. Determinare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:

$$s = ut + C \cos \omega t - C,$$

dove u e C sono costanti.

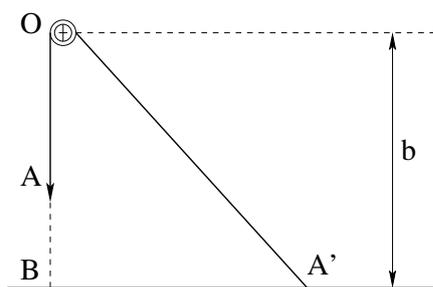
10. Calcolare velocità ed accelerazione del moto rettilineo rappresentato dall'equazione:

$$s = kt \operatorname{sen} \omega t,$$

con k e ω costanti. Studiarne poi le proprietà tracciandone il diagramma orario.

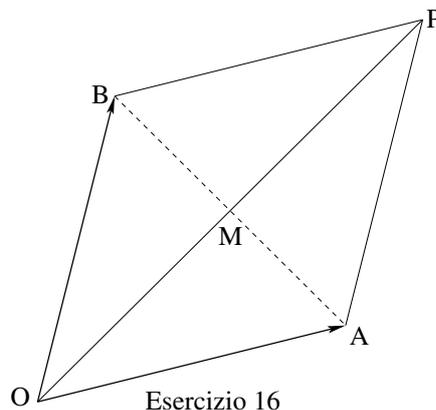
11. Un'asta rigida, lunga 1 si muova in modo che il suo estremo A percorra, di moto uniforme con velocità u la retta Ox e l'altro estremo B la retta Oy perpendicolare a Ox . Trovare l'equazione del moto di B , la sua velocità e accelerazione.

12. Una pallina A percorre una retta verticale. Essa è attaccata all'estremo di un filo lungo 1 che passa attraverso una piccola carrucola (assimilabile ad un punto O) e che ha l'altro estremo A' che percorre una retta orizzontale con velocità costante u . La distanza della carrucola dalla retta percorsa da A' è b . Trovare l'equazione del moto di A , la sua velocità e accelerazione.



Esercizio 12

13. L'estremo A' del filo considerato nell'esercizio precedente è unito, ad un'asta rigida di lunghezza m che ruota, con velocità costante ω , intorno ad un punto Q sulla retta percorsa da A . Trovare l'equazione del moto di A e la sua velocità, supposto $QO = h$.
14. Una pallina, schematizzabile con un punto P scorre su una guida rettilinea r sospinta da un'asta che ruota uniformemente, in senso orario, intorno a un suo estremo Q distante h da r . Determinare il moto della pallina.
15. Studiare il moto dell'estremo della biella di un sistema manovella-biella, quando la manovella ruota uniformemente con velocità angolare ω . Dimostrare che se il quadrato del rapporto manovella-biella è trascurabile rispetto all'unità, il moto è armonico.
16. Un rombo articolato $OAPB$ imperniato in O si muove in modo che A e B descrivono la circonferenza di raggio $OA = OB = a$, con la stessa velocità angolare ω , ma in senso opposto. Dimostrare che P si muove su una retta di moto armonico, con ampiezza $2a$.



17. Se $x = x(t)$, $y = y(t)$ sono le equazioni parametriche di una curva piana ricavare, valendosi della cinematica, l'espressione del raggio di curvatura e dei coseni direttori della tangente e della normale alla curva stessa.
18. Dato il moto rappresentato dalle equazioni:

$$x = ut, \quad y = C \cos(\omega t + \gamma),$$

con u , C , ω , γ costanti, determinare la traiettoria del moto, la sua velocità e accelerazione, le componenti tangenziale e centripeta di quest'ultima, e lo spazio in funzione del tempo.

19. Un punto P percorre una semicirconferenza di raggio r e centro nell'origine, la sua proiezione sull'asse x si muove di moto uniforme con velocità c .¹ Calcolare velocità e accelerazione di P in funzione dell'angolo φ che la retta PO forma con l'asse delle x .
20. Un punto P si muove sulla parabola $y = kx^2$, la sua proiezione sull'asse x si muove di moto uniforme con velocità c . Calcolare la velocità e l'accelerazione di P in funzione di t e delle sue coordinate. Generalizzare il risultato quando il punto si muove sulla curva $y = f(x)$.
21. Il punto P si muove sulla parabola $y = kx^2$ e la sua proiezione sull'asse x si muove di moto armonico, cioè con la legge $x = C \cos(\omega t + \gamma)$. Trovare velocità e accelerazione P .
22. Un punto si muove con velocità costante c sulla parabola $y = kx^2$. Trovare l'accelerazione del punto, in particolare per $x = 0$, e le componenti della velocità e accelerazione.
23. Un punto si muove su un cerchio di moto armonico $s = C \cos(\omega t + \gamma)$. Calcolare velocità e accelerazione.
24. Una locomotiva percorre un tratto lungo 2 km con raggio di curvatura $0,5 \text{ km}$, aumenta in quel tratto la sua velocità con accelerazione costante, da 89 a 91 km all'ora. Trovare l'accelerazione della locomotiva nell'istante finale.
25. Un punto si muove di moto uniforme su una catenaria di equazione:

$$y = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}) - b$$

(b costante). Scrivere le equazioni cartesiane del moto del punto.

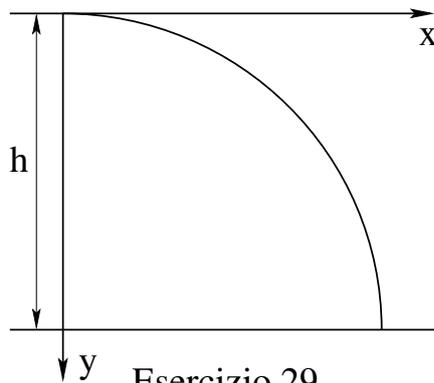
26. Calcolare le componenti sugli assi della velocità e dell'accelerazione nel moto dell'esercizio precedente.
27. Se il punto A di contatto col suolo della ruota anteriore di una bicicletta percorre una retta, trovare la traiettoria del punto di contatto P della ruota posteriore.
28. Un punto Q parte dall'origine e si muove sull'asse y di moto uniforme con velocità v . Un punto P parte da un punto P_0 dell'asse x di ascissa b e si muove con velocità u costante in modulo, ma sempre diretta verso Q (problema di inseguimento). Trovare la traiettoria di P .

¹Ovviamente il moto di P è il moto dell'intersezione con la semicirconferenza di una retta che si muove, con traslazione uniforme di velocità c , rimanendo parallela all'asse y .

29. In dinamica si dimostra che una bomba, lanciata da un aeroplano in moto (in direzione orizzontale) con velocità v_0 , si muove, se si trascura la resistenza dell'aria, secondo le equazioni:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

dove g è l'accelerazione di gravità ed essendo il sistema di assi x e y con origine nel punto dove si trova l'aeroplano al momento in cui lascia cadere la bomba, l'asse x orizzontale nella direzione del moto dell'aereo, l'asse y verticale e diretto verso il basso. Se h è l'altezza dell'aereo dal suolo, trovare a quale distanza, in direzione orizzontale dall'aereo stesso, cade la bomba.

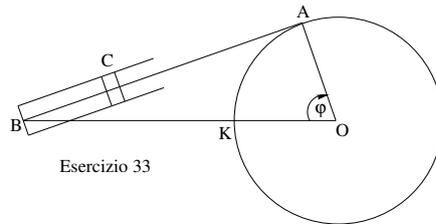
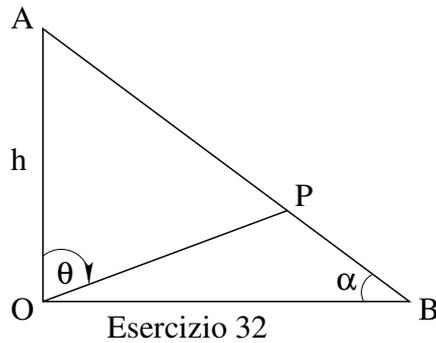


30. Un punto P si muove sullo spirale logaritmico di equazione, in coordinate polari $r = C e^{\mu\theta}$ (C e μ costanti) con velocità angolare ω costante rispetto all'origine. Trovare le componenti della velocità e accelerazione del moto in coordinate polari in funzione di r e θ e generalizzare la questione supponendo che la traiettoria del punto abbia equazione $r = f(\theta)$.
31. Un punto si muove con velocità areolare costante e uguale a $c/2$ sulla traiettoria di equazione (in coordinate polari):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu\theta},$$

dove p , e , ν sono costanti. Trovare l'accelerazione del moto.

32. Un punto si muove di moto naturalmente accelerato su un piano AB inclinato con inclinazione α . Trovare la velocità areale e angolare, rispetto alla proiezione O di A sull'orizzontale per B .



33. Nel meccanismo rappresentato dalla figura il cilindro BC è girevole intorno al perno B , la manovella OA , lunga r , si muove intorno ad O in senso destrogiro con velocità angolare costante ω . Determinare la velocità v dello stantuffo C , e la velocità angolare Q del cilindro.
34. Un punto si muove di moto elicoidale uniforme con velocità v su un'elica cilindrica di raggio r e passo p . Trovare l'accelerazione e il raggio di curvatura dell'elica.
35. Dimostrare che il moto rappresentato dalle equazioni

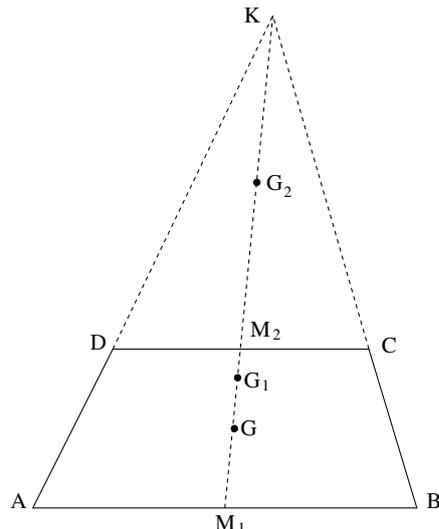
$$x = \frac{1}{2}r \sin 2\omega t, \quad y = r \sin^2 \omega t, \quad z = r \cos \omega t,$$

ha per traiettoria la finestra di Viviani² e calcolarne velocità e accelerazione.

Momenti

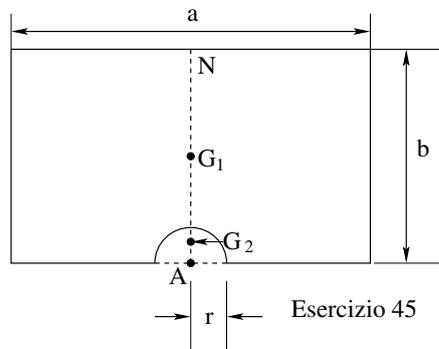
34. Dimostrare che il baricentro di tre masse puntiformi poste nei vertici di un triangolo e proporzionali alle lunghezze dei lati opposti si trova nel centro del cerchio inscritto al triangolo.
35. Trovare il baricentro di un triangolo sotto l'ipotesi che la massa sia concentrata nei lati in proporzione alle loro lunghezze e uniformemente.
41. Determinare il baricentro di un trapezio di basi b_1 e b_2 e di altezza h .

²L'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ con il cilindro $x^2 + (y - \frac{1}{2}r)^2 = \frac{1}{4}r^2$.



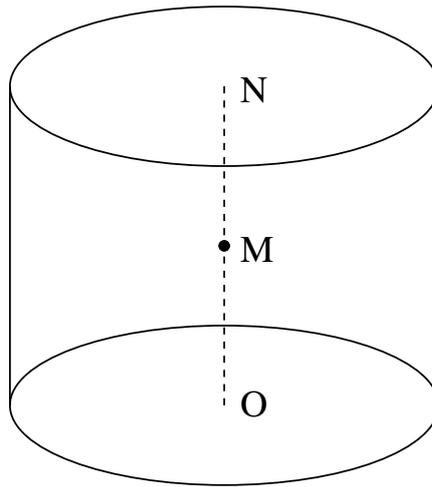
Esercizio 41

43. Trovare il baricentro di un settore circolare di raggio R e di angolo di apertura α .
44. Determinare il baricentro di un settore di corona circolare di angolo di apertura α a raggio R_1 e R_2 ($R_1 > R_2 > 0$).
45. Determinare il baricentro di un arco in muratura, schematicamente rappresentato dalla regione compresa tra un rettangolo di lati a e b e un semicerchio di raggio r ($r < \frac{1}{2}a$, $r < b$); il centro del cerchio si trova sul punto di mezzo A del lato del rettangolo lungo a .



Esercizio 45

46. Determinare il baricentro di una scatola senza coperchio, a forma cilindrica, raggio di base r , altezza h , con spessore così piccolo da poterla assimilare alla sua superficie esterna.
47. Determinare il baricentro di una scatola cubica di spigola a , senza coperchio.



Esercizio 46

48. Sia $f(z)$ ($a \leq z \leq b$) una funzione continua e positiva. Trovare il baricentro del solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z)\}.$$

51. Determinare il baricentro del segmento di parabola di equazione:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}\},$$

essendo a, p costanti positive.³

52. Determinare il baricentro dell'arco di catenaria di equazione:

$$y = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}) - b$$

compreso tra i punti di ascissa $-a$ e a .

53. Trovare il baricentro dell'elica cilindrica di equazione:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = c\theta,$$

essendo a, c costanti positive e θ compresa tra 0 e $2\pi/p$.

54. Trovare il baricentro di una semisfera di raggio R .

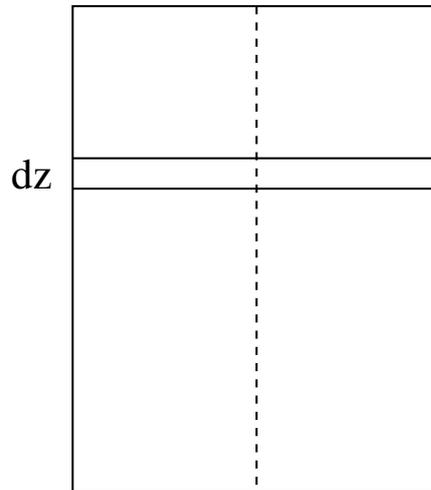
55. Trovare il baricentro della zona sferica di equazione:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\},$$

essendo $h \in (0, R)$.

³Il risultato è stato ottenuto prima da Archimede.

56. Trovare il baricentro di una colonna di area a forma di cilindro circolare, di altezza h tale che la sua base sia nel piano xy e la z secondo l'asse del cilindro, qualora la densità dell'area vari con la legge $\rho = \rho_0 e^{-kz}$, dove ρ_0 è la densità per $z = 0$ e k una costante positiva.

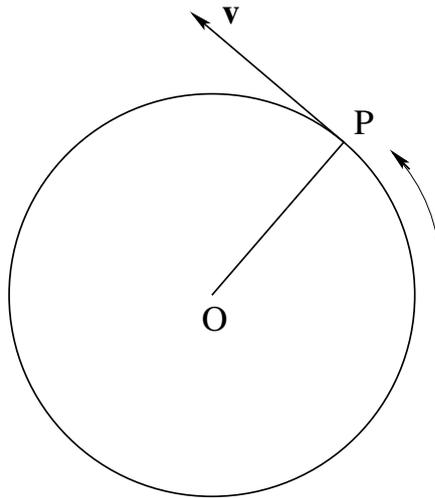


Esercizio 56

Corpi rigidi e moti relativi

1. Un punto di un corpo rotante che dista dall'asse di rotazione $r = 20$ cm, ha velocità scalare v di 3 m/sec. Trovare la velocità v_1 di un punto distante $r_1 = 30$ cm.
2. Trovare, per il corpo rotante dell'esercizio precedente, il modulo della velocità angolare e (supposto il moto uniforme) il numero dei giri per secondo.
3. Un disco di 5 cm di raggio, ruota uniformemente, nel senso della freccia, intorno al suo asse normale al piano del disegno, compiendo 90 giri al minuto primo. Calcolare in grandezza, direzione e verso il vettore $\vec{\omega}$, velocità angolare, e, pure in grandezza, direzione e verso, la velocità di un punto P della periferia del disco.
4. Trovare, in grandezza e direzione, la velocità e l'accelerazione che un punto P della terra, alla latitudine di 45° , ha per effetto alla rotazione terrestre, sapendo che il raggio R della terra vale 6374 km.
5. L'angolo θ di rotazione di un corpo con un asse fisso varia secondo la legge

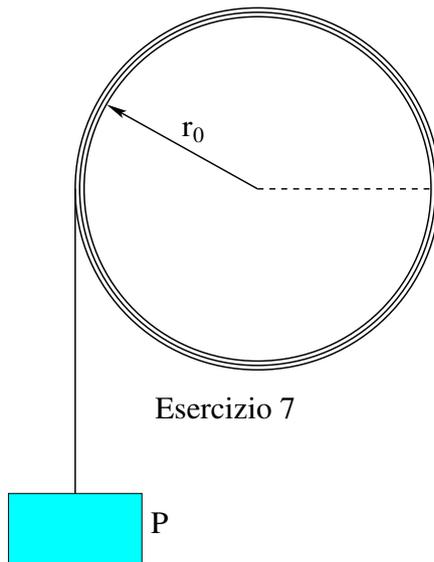
$$\theta(t) = C \sin(pt),$$



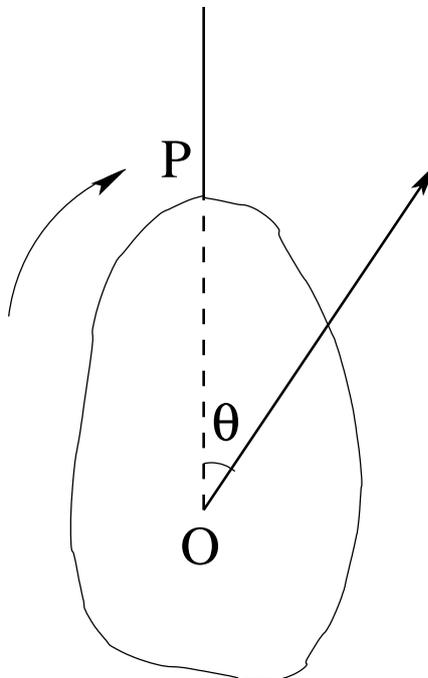
Esercizio 3

dove C e p sono costanti. Trovare velocità angolare, velocità e accelerazione di un punto distante r dall'asse.

6. Un motore elettrico compie 1800 giri per minuto. All'istante $t = 0$ si toglie la corrente che lo alimenta, sicché dopo 6 sec. si ferma. Supposto che la derivata della velocità angolare (accelerazione angolare) sia costante, trovare come varia la velocità angolare, la velocità e l'accelerazione di un punto distante r dall'asse del motore stesso.
7. Un peso è attaccato all'estremo di una corda di diametro d che viene avvolta su un rocchetto il cui diametro vale $2r_0$. Il rocchetto ruota con velocità angolare costante ω . Trovare la velocità del peso all'istante t trascurando il piccolo moto laterale della corda.
8. Un'asta rigida è fissata in un punto A e si muove perché in una sua scanalatura scorre un choïdo B che, con moto uniforme di velocità \vec{u} , percorre la retta r distante d da A . Trovare la velocità angolare dell'asta.
9. Una lamina rigida (came) ruota uniformemente nel suo piano intorno ad un punto fisso O . Un'asta rigida (punteria) scorre lungo un asse passante per O appoggiandosi con un estremo al contorno della lamina. Determinare il moto dell'asta.
10. Il cilindro di una vite ha raggio r , la sua filettatura è inclinata di α rispetto al suo asse; un punto della periferia della vite si muove con velocità v . Trovare le caratteristiche del moto elicoidale della vite, cioè la velocità di traslazione v_0 e la velocità angolare ω di rotazione.



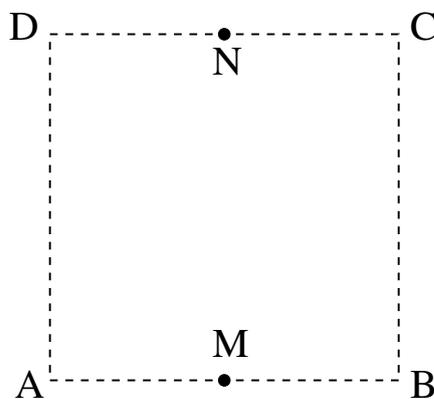
Esercizio 7



Esercizio 9

11. Indicato con O, x_1, y_1, z_1 il sistema di coordinate connesso con un corpo rigido con un punto fisso in O , dimostrare che la componente lungo l'asse y_1 della velocità del punto P , appartenente all'asse x_1 e con $x_1 = h$ è uguale e di segno contrario alla componente lungo l'asse x_1 della velocità del punto P , appartenente all'asse y_1 e con $y_1 = h$.

12. Dimostrare che nel moto non traslatorio di un corpo rigido hanno, in un determinato istante, uguale velocità solo i punti di una retta parallela all'asse istantaneo elicoidale, e velocità uguale, in valore assoluto, i punti di un cilindro circolare con lo stesso asse.
13. Se tre punti non allineati in un corpo rigido hanno, in un certo istante, uguale velocità, in quell'istante il corpo passa per uno stato cinetico di traslazione.
14. Data la velocità di due punti A , B di un corpo rigido, trovare la velocità di un punto P allineato con A e B .
15. Determinare la condizione necessaria e sufficiente affinché il vettore $\vec{\omega}$ che definisce la rotazione di un corpo abbia direzione costante, pur potendo variare in grandezza.
16. Dimostrare che in un corpo rigido negli istanti in cui $(d\vec{\omega}/dt) \cdot \vec{\omega} \neq 0$ ci è sempre un punto, e uno solo, di accelerazione nulla. Quando invece $(d\vec{\omega}/dt) \cdot \vec{\omega} = 0$ (senza che $\vec{\omega}$ o $(d\vec{\omega}/dt)$ siano entrambe nulle) se un punto del corpo ha accelerazione normale a $\vec{\omega}$ (o a $(d\vec{\omega}/dt)$ se $\vec{\omega} = \vec{0}$), esiste una retta del corpo parallela a questo vettore i cui punti hanno tutti accelerazione nulla.
17. Comporre quattro stati cinetici di rotazione definiti dai vettori applicati $(A, \vec{\omega})$, $(B, \vec{\omega})$, $(C, -\vec{\omega})$, $(D, -\vec{\omega})$, dove A , B , C , D sono i vertici di un quadrato di lato l e $\vec{\omega}$ è normale al quadrato.



Esercizio 17

18. Comporre gli stati cinetici definiti dai vettori applicati $(A, \vec{\omega})$, $(B, -\vec{\omega})$, $(C, \vec{\omega})$, $(D, -\vec{\omega})$ essendo A , B , C , D i vertici di un quadrato.

19. Comporre gli stati cinetici rotatori:

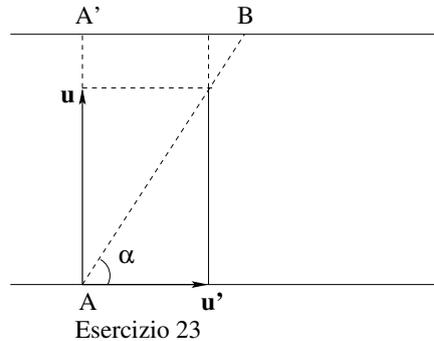
$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge (P - O_1), \quad \vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge (P - O_2),$$

dove, rispetto a una prefissata terna cartesiana:

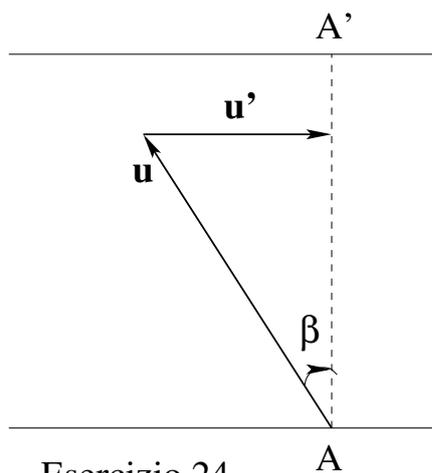
$$\vec{\omega}_1 = \frac{\omega}{2}(\vec{j} + \vec{k}), \quad \vec{\omega}_2 = \frac{\omega}{2}(-\vec{j} + \vec{k}),$$

mentre le coordinate di O_1 e O_2 sono rispettivamente $(0, 1, 1)$ e $(0, -1, 1)$.

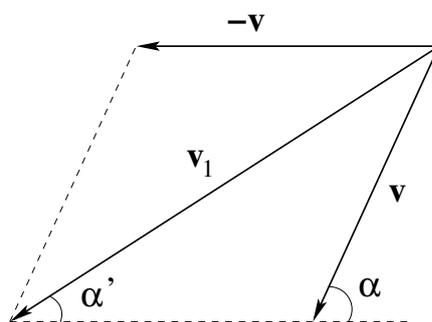
20. Determinare la posizione dell'asse istantaneo dello stato cinetico elicoidale ottenuto componendo lo stato cinetico di traslazione di velocità \vec{v}_0 con uno stato cinetico di rotazione definito dal vettore applicato $(O_2, \vec{\omega})$.
21. Un treno si muove, su un binario rettilineo, con velocità di 72 km all'ora. Una persona sul treno si muove parallelamente al binario con la velocità di un metro per secondo. Trovare la velocità della persona al suolo.
22. La persona considerata nell'esercizio precedente si muove con la stessa velocità, ma in direzione normale al treno. Trovare il valore della velocità della persona rispetto al suolo.
23. La corrente di un fiume, a sponde rettilinee, ha velocità \vec{u} . Una barca attraversa il fiume partendo da un punto A della riva a muovendosi, rispetto alla corrente, con velocità costante \vec{u}' normale alla corrente stessa. Se il fiume è largo l , determinare la distanza del punto B di approdo, dal punto A' opposto ad A sull'altra riva del fiume.



24. Nel caso dell'esercizio precedente si domanda quale direzione deve avere la barca (che si muove ancora con velocità in modulo uguale a u) affinché raggiunga il punto A' opposto ad A .

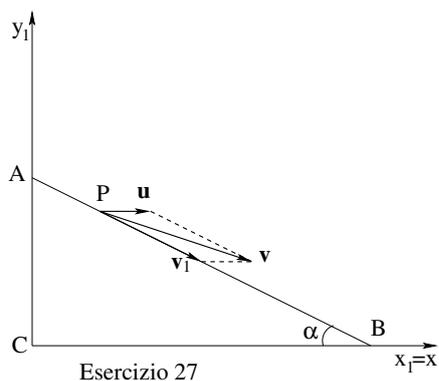


Esercizio 24

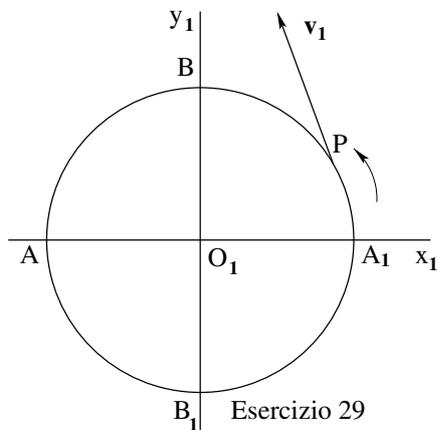


Esercizio 25

25. Una persona si muove con velocità \vec{u} sotto la pioggia inclinata di α (nel piano verticale in cui cammina la persona) rispetto all'orizzontale. Qual'è l'inclinazione ottima per l'ombrello della persona?
26. Una stella S emette un raggio luminoso, che forma un angolo α con l'orbita della terra. Dimostrare che un osservatore sulla terra, per effetto del suo moto di rivoluzione, vede la stella formare un angolo α' diverso da α con l'orbita terrestre e determinare l'angolo $\beta = \alpha - \alpha'$ (fenomeno dell'aberrazione astronomica).
27. Un punto P si muove, per effetto del suo peso su un piano di inclinazione α , partendo dall'estremo A (quindi con moto naturalmente accelerato, con accelerazione $g \sin \alpha$), mentre il piano si muove, in direzione orizzontale, con velocità costante \vec{u} . Trovare, in un istante generico, velocità e accelerazione relative all'osservatore (O) rispetto a cui si muove il piano e scrivere le equazioni del moto di P .

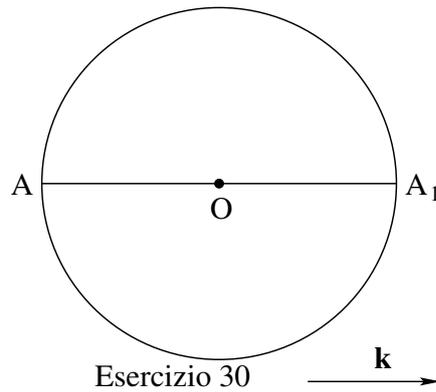


28. Risolvere il problema dell'esercizio precedente supponendo però che il piano si muova, partendo dalla quiete, in direzione orizzontale con accelerazione b e il moto del punto rispetto al piano sia come nell'esercizio suddetto.
29. Un punto P si muove, su un piano, di moto circolare uniforme, in senso antiorario, con velocità c , sul cerchio di centro O_1 e raggio r . Il piano su cui si trova il cerchio si muove, a sua volta, rispetto all'osservatore (O) con velocità \vec{u} costante e parallela al piano stesso. Trovare la velocità del punto P quando esso si trova negli estremi B e B_1 del diametro normale a \vec{u} e l'accelerazione dello stesso punto quando si trova in A e A_1 intersezioni del cerchio con il diametro parallelo ad \vec{u} . Si trovi poi l'equazione del moto di P .

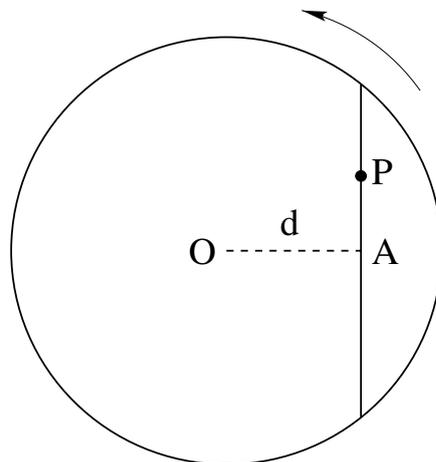


30. Un punto P si muove con velocità c sull'orlo di un disco, il quale, a sua volta, si muove, rispetto ad un osservatore (O), con moto di traslazione di accelerazione costante \vec{k} , parallela al piano del disco. Trovare l'accele-

razione di P rispetto ad (O) nei punti A, A_1 del diametro parallelo a \vec{k} .

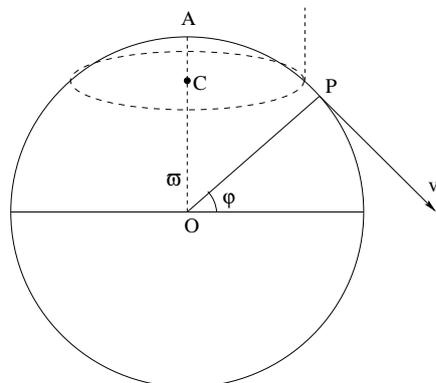


31. Un punto P si muove di moto armonico con pulsazione Ω lungo un diametro di un disco di raggio r che, a sua volta, ruota uniformemente (rispetto ad un osservatore (O)) intorno al suo asse con velocità angolare ω . Trovare velocità e accelerazione, rispetto a (O) , dal punto P , quando si trova su un estremo A del diametro percorso dal punto. Scrivere poi l'equazione del moto P rispetto all'osservatore (O) .
32. Un punto P si muove di moto armonico con pulsazione Ω , ampiezza C , su una corda distante d dal centro di un disco che ruota con velocità angolare ω rispetto all'osservatore (O) . Trovare la velocità e accelerazione del punto P , rispetto ad (O) , quando passa per il punto di mezzo A della corda muovendosi con senso concorde a quello di rotazione del disco.



Esercizio 32

33. Un punto P si muove sull'orlo di un disco di raggio r con velocità angolare Ω rispetto al suo centro. Il disco ruota rispetto ad un osservatore (O) intorno al suo asse e nello stesso verso con velocità angolare costante ω . Trovare la velocità e accelerazione rispetto ad (O) del punto P in una sua posizione generica.
34. Nell'esercizio precedente il disco ruota con velocità angolare variabile. Trovare la velocità e l'accelerazione del punto P .
35. Un punto P si muove con velocità di modulo costante v_r lungo il meridiano di una sfera di raggio r che ruota con velocità angolare costante ω intorno al suo asse OA . Trovare velocità e accelerazione di P in un punto di latitudine φ .



Esercizio 35

36. Tenendo conto della rotazione della terra, trovare la velocità angolare assoluta (più precisamente rispetto al sistema terrestre-stellare, che non partecipa al moto di rotazione della terra) di un motore che, posto in una località di latitudine φ ($\varphi \neq 0$), ruota intorno ad un asse tangente al meridiano con velocità angolare Ω costante in modulo e orientata verso il nord.
37. Riferito il moto della luna al sistema terrestre stellare (O) (con origine nel centro O della terra), sia $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare costante con cui il centro della luna percorre la sua traiettoria (supposta circolare) e sia $\vec{\Omega}$ la velocità angolare della rotazione della luna intorno al suo asse. Determinare la velocità di un punto P della luna rispetto ad un osservatore (O_1) che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno ad un asse passante per O , cioè un osservatore che dalla terra segue il moto della luna sulla sua orbita.

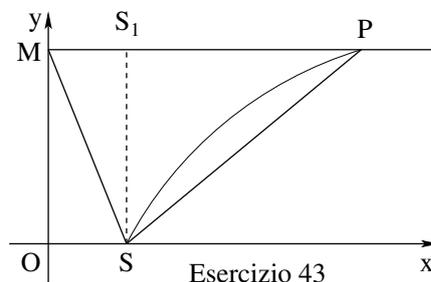
38. Determinare la velocità di un punto generico P dell'elica di un aeroplano la quale ruota intorno al suo asse con velocità angolare $\vec{\Omega}$. I punti dell'aeroplano si muovono sempre in piani orizzontali, il centro O' dell'elica percorre con velocità \vec{u} , costante in modulo, un cerchio di centro O e raggio R , l'asse dell'elica è sempre tangente a questo cerchio.
39. Scrivere l'equazione del moto del centro della luna rispetto al sistema solare, supponendo le orbite della luna e della terra circolari e complanari.
40. Comporre n moti armonici di uguale ampiezza C , ognuno sfasato rispetto al precedente della quantità costante γ .
41. Interpretare, col metodo della composizione dei moti, il moto rettilineo di equazione

$$x = ut + C \cos(\omega t) - C.$$

42. Interpretare il moto rettilineo rappresentato dall'equazione

$$x = C_1 \cos(\omega t + \gamma_1) + C_2 \cos(2\omega t + \gamma_2).$$

43. Una retta parallela all'asse x si sposta con velocità costante u parallela all'asse y , inizialmente coincide con l'asse x . Un punto P si muove sulla retta in modo che l'angolo PSM sia sempre retto essendo S un punto dell'asse x di ascissa a , M l'intersezione della retta con l'asse y . Trovare la traiettoria di P .



Appendice D

Esercizi: II

Cinematica

1. È dato il moto piano definito dalle equazioni:

$$x(t) = t \cos(t), \quad y(t) = t \sin(t).$$

Si chiede: a) l'equazione cartesiana della traiettoria, b) la legge oraria, c) discutere il moto.

2. È dato il moto di equazioni:

$$x(t) = 2 + 3 \cos(\omega t), \quad y = 3 + 2 \sin(\omega t), \quad z = \cos(\omega t).$$

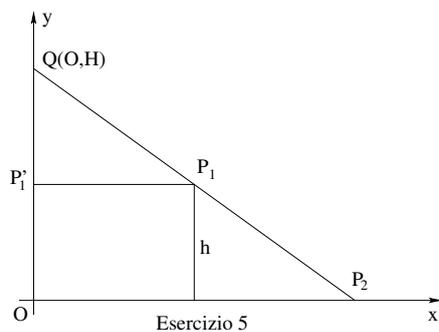
Si chiede: a) dimostrare che il moto è centrale e determinarne il centro, b) scrivere l'equazione del piano del moto.

3. Un punto P si muove con velocità assegnata:

$$\vec{v}(t) = (3 \sin(t), 2 \cos(t), 0).$$

Si chiede di determinare: a) gli istanti di arresto e quando il moto è accelerato o ritardato, b) l'accelerazione scalare, c) il moto nell'ipotesi che inizialmente (per $t = 0$) sia: $\vec{v}_0 = (0, 2, 0)$, $P_0 = (-3, 0, 0)$.

4. Un'automobile, che viaggia ad una certa velocità v_0 , inizia a frenare e si arresta dopo un tempo t_1 . Supposto che, mentre frenava, l'autoveicolo si sia mosso di moto uniformemente accelerato, determinare la lunghezza del cammino percorso durante la frenata stessa.
5. Si consideri una lampada situata in un punto Ω posto alla quota H sopra un suolo piano orizzontale. Sia h ($0 < h < H$) l'altezza di una persona che si allontana dalla lampada. Supponiamo che sia noto il moto della persona. Si chiede di determinare il moto del punto P_2 estremità dell'ombra.



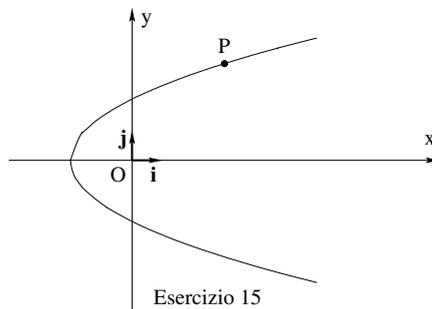
6. Il moto è dato da:

$$x(t) = 6t - 3t^2, \quad y(t) = 8t - 4t^2.$$

Determinare l'equazione della traiettoria, la velocità e l'accelerazione del punto.

7. Un punto P percorre con un moto uniformemente accelerato una circonferenza di raggio R partendo da fermo. Dopo aver percorso un arco lungo s_1 esso ha acquistato una velocità \dot{s}_1 . Trovare la velocità e l'accelerazione di P nella posizione $s_1/2$.
8. Un punto P descrive la sua traiettoria con accelerazione scalare assegnata $\ddot{s}(t)$. Si sa che all'istante $t = t_1$ la sua velocità è \dot{s}_1 e che s_1 è la distanza percorsa. Si chiede di scrivere l'equazione del moto.
9. Si supponga che un sasso, gettato in un pozzo senza velocità iniziale, si muova con accelerazione costante e che il rumore, dovuto all'urto col fondo, si propaghi con velocità costante. Detta v_0 la grandezza della velocità del suono, si chiama t_1 il tempo intercorso tra l'istante in cui si lascia cadere il sasso e quello in cui si ode il rumore. Calcolare la profondità del pozzo.
10. Siano dati n moti armonici su una traiettoria riferita all'ascissa curvilinea s . Essi presentino tutti il medesimo centro (l'origine delle ascisse) e la medesima pulsazione ω . Si chiede di studiare il moto composto.
11. Si consideri il riferimento cartesiano ortogonale e levogiro $Oxyz$ e tre moti armonici di uguale periodo sui tre assi coordinati. Studiare il moto composto.
12. Nel piano Oxy si consideri un punto P mobile di moto uniformemente accelerato su una circonferenza di centro O . Determinare la velocità angolare e la velocità areolare rispetto al centro.

13. Riferiamo lo spazio al sistema cartesiano levogiro $Oxyz$ e supponiamo che due punti, P_1 e P_2 , si muovano ciascuno di moto rettilineo ed uniforme. Si chiede l'istante in cui la distanza tra i due punti è minima.
14. Si consideri una circonferenza di centro O e raggio R . Due punti, P_1 e P_2 , si muovono su di essa partendo dallo stesso punto A , ma con velocità angolari costanti ω_1 e ω_2 rispettivamente. Si chiede di determinare gli istanti e le posizioni in cui P_1 e P_2 sono sovrapposti.
15. Un punto si muove su una parabola di equazione $y^2 = hx + k$ con accelerazione $\vec{a} = (a, 0)$ e con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Di chiede: a) determinare il moto, b) le condizioni sui dati perché il problema abbia soluzione, c) la velocità areale di P rispetto all'origine degli assi.

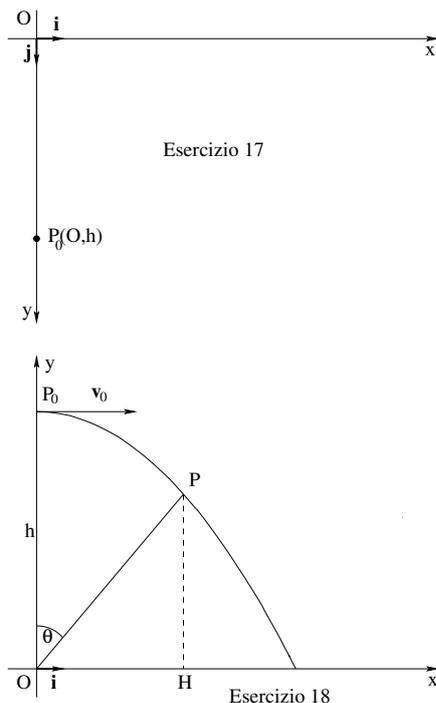


16. Le equazioni del moto di un punto P sono:

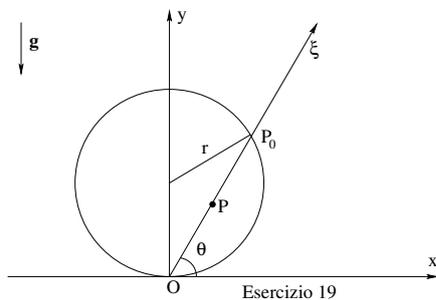
$$x(t) = \frac{1}{2}kt - \frac{1}{4}\sin(2kt), \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(kt), \quad z(t) = \sin(kt),$$

con k costante positiva. Determinare: a) la velocità e l'accelerazione vettoriali e scalari del punto P , b) il raggio di curvatura e la legge oraria del moto di P .

17. Un osservatore in O vede passare un punto materiale P , che si muove lungo l'asse y sotto l'azione della gravità, agli istanti t_1 , verso l'alto, e t_2 ($t_2 > t_1$), verso il basso. Si chiedono la quota dalla quale parte e la velocità iniziale.
18. È dato un punto materiale P che cade sotto l'azione della gravità, da una quota h con velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ (essendo $v_0 > 0$ e $\vec{i} = (1, 0)$). Si chiede: a) le equazioni del moto di P , b) l'istante in cui P tocca il suolo, c) la velocità areolare di P rispetto all'origine O .



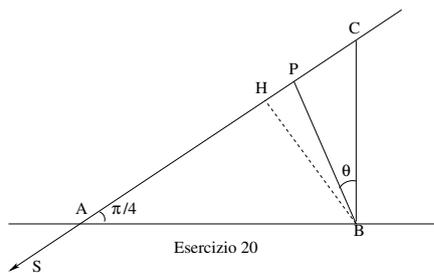
19. È dato un punto materiale P che si muove, sotto l'azione della gravità, lungo una guida rettilinea ξ a partire, con velocità iniziale nulla, dall'intersezione della guida con una circonferenza disegnata come in figura. Si chiede per quale valore dell'inclinazione θ della guida è massimo il tempo impiegato da P per raggiungere O .



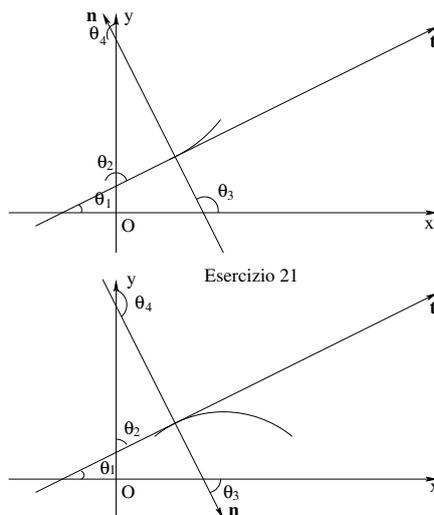
20. Un punto materiale P cade per gravità lungo un piano inclinato di $\pi/4$ sull'orizzontale, con le condizioni iniziali:

$$P_0 \equiv C, \quad \vec{v}_0 = \vec{0}.$$

Detta B la proiezione di C sul suolo, θ l'angolo tra BC e BP , a la lunghezza del piano inclinato, si chiede: a) la legge oraria del moto, b) la velocità areale di P rispetto a B , c) la funzione $\theta(t)$.

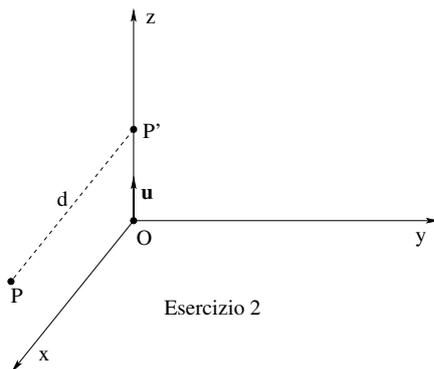
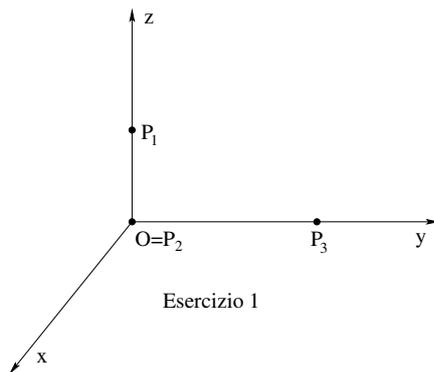


21. Sia data una curva piana di equazioni parametriche: $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$. Trovare i coseni direttori della tangente e della normale principale alla curva e determinare il raggio di curvatura.

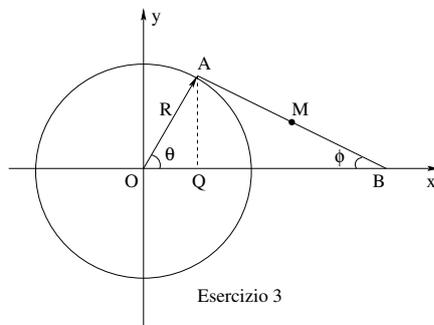


Sistemi rigidi

1. P_1 , P_2 e P_3 siano tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto ad una terna solidale siano: $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 0, 0)$, $P_3(0, 2, 0)$. Sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, cioè $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 2, -2)$, mentre la velocità di P_3 in quell'istante è parallela al piano yz . Determinare la velocità \vec{v}_3 di P_3 e la velocità angolare $\vec{\omega}$. Determinare l'atto di moto.
2. Un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare $\vec{\omega} = (t^2 + a)\vec{u}$, essendo a una costante positiva e \vec{u} il versore dell'asse di rotazione. Determinare la velocità e l'accelerazione scalari di un punto P situato a distanza d dall'asse di rotazione.
3. In un piano riferito al sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ si consideri una circonferenza di raggio R e centro O . Un'asta rigida AB , di lunghezza

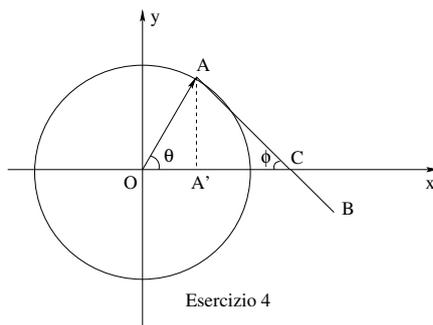


$\ell(> 2R)$, ha un estremo sulla circonferenza e l'altro sull'asse x . Il punto A ruota uniformemente sulla circonferenza. Inizialmente l'asta è sovrapposta all'asse x positivo. Determinare la velocità del punto B , la velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta e la velocità e l'accelerazione del punto medio, M , dell'asta.

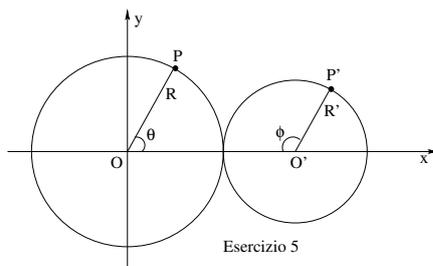


4. Nel piano xy di un sistema cartesiano levogiro $Oxyz$, si consideri l'asta AB vincolata con l'estremo A a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro O e raggio R , e a passare per il punto C sull'asse x . Sia $h = \|OC\|$.

Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta e la velocità del punto dell'asta che transita per C .



5. Nel piano cartesiano Oxy si considerino due cerchi incernierati con i centri O e O' e di raggio R e R' rispettivamente. Sia $\|OO'\| = R + R'$ e non ci sia scorrimento tra i dischi. Sia, inoltre, θ l'angolo che un raggio solidale al primo disco forma col semiasse positivo x e sia ϕ l'analogo per il secondo disco, orientati come in figura. Supposta nota la funzione $\theta(t)$, trovare la velocità angolare del secondo disco.



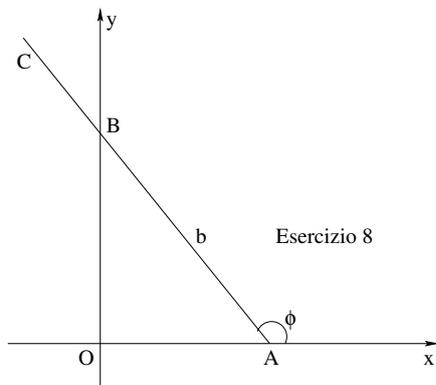
6. Un motore funziona a regime e il suo albero motore ha velocità angolare ω_0 . Ad un certo istante viene spento e, per inerzia, il sistema si ferma dopo un tempo t_1 . Supponendo che in questo periodo l'albero si sia mosso di moto uniformemente ritardato, si chiede di determinare il numero di giri da esso effettuati dall'istante di spegnimento.
7. Si consideri un disco che può ruotare attorno all'asse passante per il suo centro e perpendicolare al suo piano. Detto ϕ l'angolo che un suo raggio forma con una direzione fissa del piano, si supponga che sia:

$$\phi(t) = at^3,$$

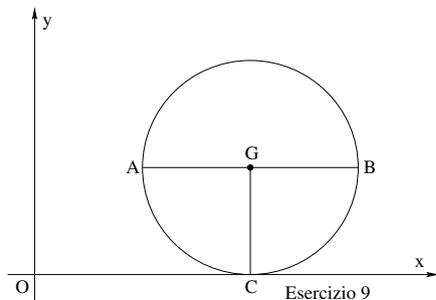
essendo a una costante positiva. Determinare le grandezze della velocità e dell'accelerazione di un punto, che dista h dall'asse di rotazione, nell'istante

in cui la grandezza dell'accelerazione tangenziale diventa uguale a quella dell'accelerazione normale.

8. Si consideri un'asta AC di lunghezza ℓ . Essa sia vincolata con il punto A sull'asse x positivo di un sistema cartesiano Oxy . Inoltre il punto B dell'asta, che dista b ($0 < b < \ell$) da A , è vincolato a scorrere sull'asse y . Determinare l'equazione della traiettoria del punto C .



9. Si consideri un disco di raggio R che rotola su una guida rettilinea x . Sia G il centro del disco e C il punto di contatto con la guida. Il rotolamento sia puro, cioè senza strisciamento (in ogni istante risulti $\vec{v}_C = \vec{0}$). Si supponga di conoscere ad un dato istante t_1 la velocità $\vec{v}_G = v_G \vec{i}$ ($\vec{i} = (1, 0)$) e l'accelerazione $\vec{a}_G = (dv_G/dt) \vec{i}$ del punto G . Determinare in tale istante velocità e accelerazione dei punti A , B (estremi del diametro ortogonale a GC) e del punto C .

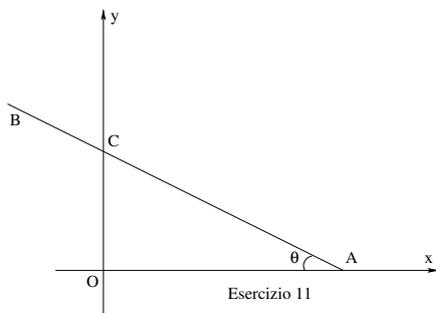


10. Un sistema rigido è vincolato a ruotare attorno ad un suo asse fisso. Detto θ l'angolo tra due piani passanti per l'asse, il primo fisso nello spazio e il secondo solidale al corpo, si supponga che sia:

$$\theta(t) = a \sin(bt),$$

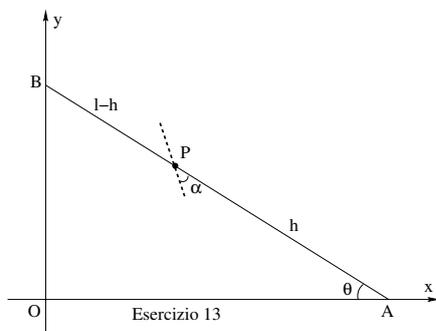
essendo a, b costanti positive. Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$ del corpo rigido e la velocità e l'accelerazione di un punto P di esso che dista r dall'asse fisso.

11. Si consideri l'asta rigida AB il cui estremo A è fisso. Essa, inoltre, passa per il punto C vincolato a scorrere, con legge assegnata, su un asse non passante per A . Determinare la velocità angolare dell'asta.



12. Dato un moto rigido generico, si determini il luogo geometrico dei punti che, ad un dato istante, hanno la stessa velocità. Determinare poi il luogo geometrico di quelli che hanno, ad un dato istante, velocità scalari uguali.

13. Si consideri un'asta rigida AB , di lunghezza ℓ , i cui estremi sono vincolati a scorrere sugli assi x e y rispettivamente. Si determini la traiettoria del punto P che dista h ($0 < h < \ell$) da A . Supposta nota la velocità \vec{v}_A del punto A e la posizione dell'asta ad un dato istante, si chiede di determinare la velocità di P in quell'istante.



14. Si considerino due moti rigidi, rotatori uniformi attorno ad assi concorrenti in un punto O . Dette $\vec{\omega}_1(t)$ e $\vec{\omega}_2(t)$ le rispettive velocità angolari, studiare il moto composto.

15. Dato un moto rigido generico, determinare (se esiste) il luogo geometrico dei punti che, ad un dato istante, hanno accelerazione nulla.

Bibliografia

- [1] Sergio Bressan e Antonio Grioli, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 2002.
- [2] Carlo Cercignani, *Spazio, Tempo, Movimento*, Zanichelli, Bologna, 1976.
- [3] Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [4] Giorgio Ferrarese, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Pitagora Editrice, Bologna, 1980.
- [5] Herbert Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli, Bologna, 1971.
- [6] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko, *Meccanica Classica*, Seconda Edizione, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [7] Dario Graffi, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Quarta Ed., Riccardo Patron, Bologna, 1970.
- [8] Giuseppe Grioli, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1996.
- [9] Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume Primo, Volume Secondo Parte Prima, Volume Secondo Parte Seconda, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [10] John R. Taylor, *Meccanica Classica*, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [11] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*, Fourth Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1947.