Meccanica Razionale 1: Secondo parziale
04.06.2010

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
10	10	10	30

1. Consideriamo il pendolo semplice con attrito, dove un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza liscia situata in un piano verticale. Sia l la lunghezza del pendolo, ci sono due forze da prendere in considerazione: la forza gravitazionale mg, e la forza di attrito, pensata proporzionale alla velocità angolare $-c\dot{\theta}$, con $c > 0$.

   a. Trovare le equazioni del moto dalla seconda legge di Newton.

   b. Spiegare perchè, nel caso in cui non c'è l'attrito, la forza totale è conservativa.

   c. Spiegare perchè, nel caso in cui c'è l'attrito, la forza totale non è conservativa.

   d. Utilizzando l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$, risolvere le equazioni del moto sotto le condizioni iniziali $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Ci si può limitare al caso $0 < c < 2m\sqrt{gl}$.

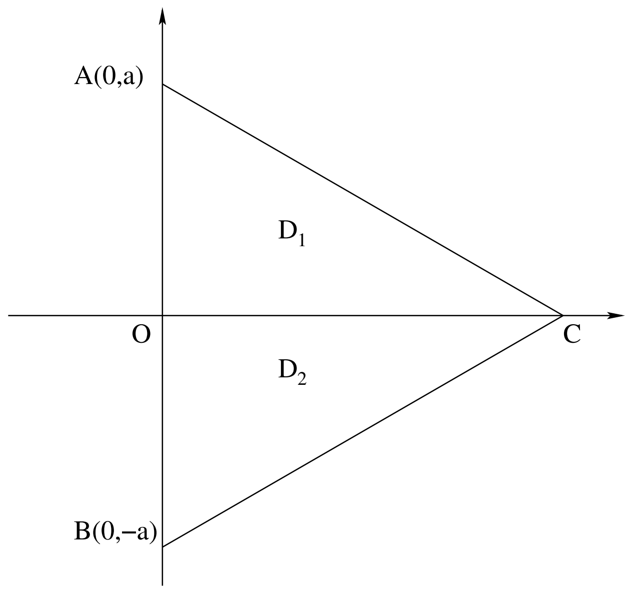
2. Sia dato un triangolo equilatero ABC omogeneo di densità μ, disposto come in figura. Si determinino

   a. il baricentro del triangolo,

   b. il momento d'inerzia rispetto alla retta r passante per l'origine O e avente coseni direttori $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,

   c. il momento d'inerzia rispetto all'asse z,

   d. il momento d'inerzia rispetto alla retta r' passante per C e parallela all'asse y.



3. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sotto l'effetto della forza elastica $\vec{F} = -k\vec{r}$, essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si consiglia di scegliere le solite coordinate cilindriche).

   b. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

   c. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   d. Trovare tutti i moti del sistema lungo una circonferenza in un piano orizzontale con il centro sull'asse z.

1. **SOLUZIONE**: La forza gravitazionale, $-mg\vec{k}$, ha un componente centripetale diretto verso l'originale (di lunghezza $mg\cos\theta$) e un componente tangenziale. Quest'ultimo (di lunghezza $mg\sin\theta$) e la forza di attrito $c\dot{\theta}$ tendono a frenare il moto. Quindi l'equazione del moto è la seguente:
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - c\dot{\theta},$$
oppure
$$\ddot{\theta} + \frac{c}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$
Poichè, per $c > 0$, la forza dipende dalla posizione e dalla velocità della massa, essa non può essere conservativa. Per $c = 0$ abbiamo $\vec{F}_{\text{tot}} = -mg\vec{k} = -\nabla U$, dove $U = mgz$; quindi in tal caso la forza totale è conservativa.

Sotto l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$, l'equazione del moto
$$\ddot{\theta} + \frac{c}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$
è un'equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine, avente l'equazione caratteristica
$$0 = \lambda^2 + \frac{c}{ml}\lambda + \frac{g}{l} = \left(\lambda + \frac{c}{2ml}\right)^2 + \frac{1}{4m^2l^2}\left(4m^2gl - c^2\right).$$
Per $0 < c < 2m\sqrt{g\ell}$ quest'ultimo termine è positivo. Di conseguenza,
$$\lambda = -\frac{c}{2ml} \pm i\omega,$$
essendo
$$\omega = \frac{1}{2ml}\sqrt{4m^2gl - c^2} = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{c}{2ml}\right)^2}.$$
La soluzione generale è
$$\begin{aligned}
\theta(t) &= e^{-\frac{ct}{2ml}}\left\{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right\};\\
\dot{\theta}(t) &= e^{-\frac{ct}{2ml}}\left\{\left[B\omega - \frac{cA}{2ml}\right]\cos(\omega t) - \left[A\omega - \frac{cB}{2ml}\right]\sin(\omega t)\right\}.
\end{aligned}$$
Poichè $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, risulta
$$A = \theta_0, \qquad B = \frac{cA}{2ml\omega} = \frac{c\theta_0}{2ml\omega}.$$

Quindi

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{ct}{2ml}} \left\{ \cos(\omega t) + \frac{c}{2ml\omega} \sin(\omega t) \right\},$$
$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega \left(1 + \left[\frac{c}{2ml\omega} \right]^2 \right) e^{-\frac{ct}{2ml}} \sin(\omega t).$$

2. **SOLUZIONE**: L'area triangolare ha la seguente forma:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq a\sqrt{3}, |y| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3} - x) \right\},$$

oppure:

$$D = \left\{ (x, y) : -a \leq y \leq a, 0 \leq x \leq (a - |y|)\sqrt{3} \right\}.$$

La massa totale è densità per area: $m = \mu a^2 \sqrt{3}$. Il baricentro (x_B, y_B) è dato da

$$x_B = \frac{1}{m} \iint_D \mu x \, dxdy = \frac{1}{\mu a^2 \sqrt{3}} \int_{-a}^{a} \int_0^{(a-|y|)\sqrt{3}} \mu x \, dxdy = \frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$y_B = \frac{1}{m} \iint_D \mu y \, dxdy = \frac{1}{m} \int_0^{a\sqrt{3}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)} \mu y \, dydx = 0.$$

Il momento d'inerzia rispetto ad una retta per O e avente coseni direttori (α, β, γ) è dato da

$$\mathcal{I} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta,$$

essendo

$$A = \iint_D \mu(y^2 + z^2) d^3\vec{r}, \ B = \iint_D \mu(x^2 + z^2) d^3\vec{r}, \ C = \iint_D \mu(x^2 + y^2) d^3\vec{r},$$
$$A' = \iint_D \mu yz \, d^3\vec{r}, \qquad B' = \iint_D \mu xz \, d^3\vec{r}, \qquad C' = \iint_D \mu xy \, d^3\vec{r}.$$

Poichè D cade nel piano $z = 0$, abbiamo $A' = B' = 0$, mentre

$$A = \iint_D \mu y^2 \, d^3\vec{r} = \mu \int_0^{a\sqrt{3}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)} y^2 \, dy = \tfrac{1}{6}\mu a^4\sqrt{3} = \tfrac{1}{6}ma^2,$$

$$B = \iint_D \mu x^2 \, d^3\vec{r} = \mu \int_0^{a\sqrt{3}} x^2 \, dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)} dy = \tfrac{1}{2}\mu a^4\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}ma^2,$$

$$C = \iint_D \mu(x^2 + y^2) d^3\vec{r} = A + B = \tfrac{2}{3}\mu a^4\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}ma^2,$$

$$C' = \iint_D \mu xy \, d^3\vec{r} = \mu \int_0^{a\sqrt{3}} x \, dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-x)} y \, dy = 0.$$

Nella parte b), dove $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\gamma = 0$, si ha

$$\mathcal{I} = \tfrac{1}{2}(A + B) - C' = \tfrac{1}{3}a^4\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}ma^2.$$

Nella parte c), dove $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma = 1$, si ha

$$\mathcal{I} = C = \tfrac{2}{3}\mu a^4\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}ma^2.$$

Per quanto riguarda la parte d), applichiamo il teorema di Huygens per trovare il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per il baricentro G e parallela all'asse y. Troviamo:

$$\mathcal{I}_G = \mathcal{I} - m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \tfrac{1}{2}ma^2 - \tfrac{1}{3}ma^2 = \tfrac{1}{6}ma^2.$$

Applichiamo il teorema di Huygens di nuovo:

$$\mathcal{I}_C = \mathcal{I}_G + m\left(\tfrac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2 = \tfrac{1}{6}ma^2 + \tfrac{4}{3}ma^2 = \tfrac{3}{2}ma^2.$$

3. **SOLUZIONE**: Utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

otteniamo

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$T = \tfrac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2),$$

essendo $z = r$. Inoltre,

$$U = \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \tfrac{1}{2}k(r^2 + z^2) = kr^2.$$

Quindi ci sono due gradi di libertà e la lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L} = m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - kr^2.$$

Dunque, θ non appare esplicitamente in $\mathcal{L}$ e quindi

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

è una quantità conservata (infatti, il momento d'inerzia rispetto all'asse z). Poichè la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, viene conservata anche l'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = T + U = m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + kr^2.$$

Ci rimane una singola equazione di Eulero-Lagrange non banale:

$$2m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - 2kr,$$

oppure:

$$\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{2m^2r^3} - \frac{kr}{m}.$$

Quindi per $r = r_0$, essendo

$$r_0 = \left(\frac{p_\theta^2}{2mk}\right)^{1/4},$$

troviamo $\ddot{r} = 0$ e quindi $z = r = r_0$ costante. In tal caso il moto procede lungo una circonferenza a velocità angolare costante. Non ci sono moti in cui $\dot{r}$ è costante ma diverso da zero, poichè in tal caso $r = r_0$ sarebbe costante.