Meccanica Razionale 1: Secondo parziale
30.05.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

es.1	es.2	es.3	somma
10	12	8	30

1. Una particella di massa m cade sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una seconda forza d'attrito proporzionale alla sua velocità scalare, cioè,
$$\vec{F} = [-mg - c\dot{z}]\vec{k}$$
per un'opportuna costante $c > 0$, essendo $\vec{k} = (0, 0, 1)$.
   a. È olonomo il sistema? Determinarne i gradi di libertà.
   b. Date l'altezza iniziale z_0 e la velocità iniziale (con direzione verticale) $\dot{z}_0$, determinare la velocità $\dot{z}(t)$ e l'altezza $z(t)$.
   c. Discutere l'andamento della velocità se $t \to +\infty$.
   d. Dimostrare che la risultante $\vec{F}$ delle due forze non è conservativa.

2. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ sotto l'effetto della forza
$$\vec{F} = -\frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}\hat{e}_r = -\frac{k[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$
essendo $k > 0$ un'opportuna costante.
   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si consiglia di scegliere le coordinate cilindriche).
   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
   c. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.

d. Trovare, se esistono, tutti i moti del sistema lungo una circonferenza in un piano orizzontale con il centro sull'asse z.

3. Consideriamo il sistema dei due corpi, il Sole di massa M_S e un pianeta di massa m. I due corpi si muovono nel piano xy.

   a. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ affinchè la traiettoria del pianeta attorno al baricentro sia una circonferenza.

   b. Applicare la legge della conservazione dell'energia per calcolare la velocità di fuga v_e dal sistema Solare, partendo da una distanza r dal baricentro. In altre parole, determinare la minima velocità scalare v_g per allontanarsi in modo definitivo dal sistema Solare, partendo da una distanza r dal baricentro Sole-pianeta.

SOLUZIONI:

1. a. Poichè la particella è vincolata a muoversi lungo l'asse z, il sistema è olonomo e ha un singolo grado di libertà.

   b. L'equazione del moto è la seguente:

$$m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}.$$

   Risolvendo quest'equazione differenziale in $\dot{z}$, si ha

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_0 e^{-ct/m} - \frac{mg}{c}\left[1 - e^{-ct/m}\right].$$

   Inoltre,

$$z(t) = z_0 - \frac{mg}{c}t + \frac{m}{c}\left(\dot{z}_0 + \frac{mg}{c}\right)(1 - e^{-ct/m}).$$

   c. Prendendo il limite se $t \to +\infty$, risulta

$$\dot{z}(t) \to -\frac{mg}{c}, \qquad t \to +\infty.$$

   d. La forza risultante dipende dalla velocità e non può essere conservativa.

2. a. Poichè c'è un singolo vincolo, ci sono due gradi di libertà. In coordinate cilindriche abbiamo, per $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$ e $\dot{z} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot{r}$. Quindi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left\{[\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta]^2 + [\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta]^2 + [2r\dot{r}]^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2\right). \end{aligned}$$

   Poichè $\vec{F} = -(k/[r^2+z^2])\hat{e}_r = -\nabla U$, risulta

$$U = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{k}{\sqrt{r^2+r^4}}.$$

   Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2\dot{r}^2\right) + \frac{k}{\sqrt{r^2+r^4}}.$$

c. Essendo θ una variabile ciclica, è costante del moto il corrispondente momento generalizzato $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = 2m\dot{A}$. Dunque è costante del moto la velocità areale $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$. L'altra costante del moto è l'hamiltoniana $H = T + U$.

b. La seconda equazione di Eulero-Lagrange è

$$mr\dot{\theta}^2 + 4mr\dot{r}^2 - \frac{k[1+2r^2]}{r^2(1+r^2)^{3/2}} = m[1+4r^2]\ddot{r} + 8mr\dot{r}^2.$$

Oppure:

$$mr\dot{\theta}^2 - 4mr\dot{r}^2 - \frac{k[1+2r^2]}{r^2(1+r^2)^{3/2}} = m[1+4r^2]\ddot{r}.$$

Eliminando $\dot{\theta} = [2\dot{A}]/r^2$, si ha

$$\frac{4m\dot{A}^2}{r^3} - 4mr\dot{r}^2 - \frac{k[1+2r^2]}{r^2(1+r^2)^{3/2}} = m[1+4r^2]\ddot{r}.$$

d. Sostituire $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$ nell'equazione precedente. Si ha

$$4m\dot{A}^2 = \frac{kr[1+2r^2]}{(1+r^2)^{3/2}}.$$

Si controlla facilmente che la parte a destra è una funzione crescente di r che cresce da zero (per $r = 0$) a $2k$ (se $r \to +\infty$). In altre parole, esiste un'unica soluzione del tipo $r =$ costante se e solo se $[4m\dot{A}^2] < 2k$.

3. a. Se la traiettoria è una circonferenza attorno al baricentro, allora la forza centripetale coincide con quella gravitazionale. Ciò vuol dire $\frac{\mu v^2}{r} = \frac{GM\mu}{r^2}$. Oppure:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

b. L'energia totale

$$H = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM\mu}{r}$$

è una costante del moto. Quindi

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + \frac{2H}{\mu}} \to \sqrt{\frac{2H}{\mu}}, \qquad r \to +\infty,$$

essendo non negativa l'energia totale H. In altre parole,

$$v \geq v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$