Tabella 1: Best 5 out of 6

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es.6	somma
5	5	5	5	5	5	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 22.06.2011

Cognome e nome: ....Matricola: ....

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = y = e^{-t}\cos(t), \qquad z = \sqrt{2}\, e^{-t}\sin(t),$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e i moduli della velocità del punto P.

   b. Calcolare la lunghezza della curva.

   c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

   d. Qual'è la torsione della curva in ogni punto?

2. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \quad (P_2, -\vec{i} + \vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j} - \vec{k}), \quad (P_4, \vec{i}),$$

essendo $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$, $P_4 = (0,0,0)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.

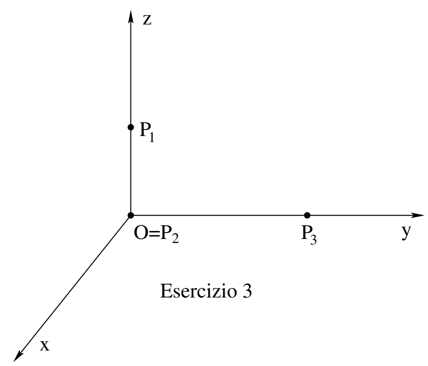
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.

   c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.

3. P_1, P_2 e P_3 siano tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto ad una terna solidale siano: $P_1(0,0,1)$, $P_2(0,0,0)$, $P_3(0,2,0)$. Sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, cioè $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (-1,2,-2)$, mentre la velocità di P_3 in quell'istante è parallela al piano yz.

   a. Determinare la velocità $\vec{v}_3$ di P_3 e la velocità angolare $\vec{\omega}$.

   b. Stabilire se l'atto di moto è rotatorio.



Esercizio 3

4. Sia $f(z)$ $(a \leq z \leq b)$ una funzione continua e positiva. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq f(z)\}.$$

   a. Trovare il baricentro del solido.

   b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto al suo asse di rotazione.

5. Un corpo di massa m si muove nel piano xz sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una forza di attrito orizzontale proporzionale alla velocità orizzontale.

   a. Determinare le equazioni di moto.

   b. Data una velocità iniziale orizzontale ($\dot{x}_0 > 0$, $\dot{z}_0 = 0$, $x_0 = z_0 = 0$), trovare la posizione del corpo all'istante $t > 0$.

   c. Dire se la forza totale agente è conservativa, motivando la risposta.

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie conica di equazione $z = t\sqrt{x^2 + y^2}$ dipendente dal tempo sotto l'effetto della sola forza elastica

$$\vec{F} = -k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

essendo $k > 0$ la costante di elasticità.

a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si suggerisce di scegliere le coordinate cilindriche).
b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
c. Indicare almeno una costante del moto e spiegare perchè lo è.

SOLUZIONI:

1. a. $\dot{\vec{x}}(t) = e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t), -\cos(t) - \sin(t), \sqrt{2}[\cos(t) - \sin(t)])$,
$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = 2e^{-t}$.

   b. $s(t) = \int_0^t 2e^{-t'}\, dt' = 2(1 - e^{-t}) \to 2$ se $t \to +\infty$.

   c. Il versore tangente è

$$\vec{t} = \tfrac{1}{2}(-\cos(t) - \sin(t), -\cos(t) - \sin(t), \sqrt{2}\,[\cos(t) - \sin(t)]).$$

Dunque,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{x}}{ds^2} &= \frac{\dot{\vec{t}}}{ds/dt}\\ &= \frac{e^t}{4}(\sin(t) - \cos(t), \sin(t) - \cos(t), \sqrt{2}\,[-\sin(t) - \cos(t)]),\end{aligned}$$

essendo $e^t = [2/(2-s)]$. Di conseguenza, $\kappa(s) = [1/(2-s)]$.

   d. La curva è piana (nel piano $x = y$) e dunque $\tau = 0$.

2. a. Il vettore risultante $\vec{R} = 2\vec{i} + \vec{k} \neq \vec{0}$.

   b. Scegliendo $O = (0, 0, 0)$, abbiamo per il momento risultante

$$\begin{aligned}\vec{M}(O) &= \vec{i} \wedge (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + \vec{j} \wedge (-\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \wedge (-\vec{j} - \vec{k}) + \vec{0} \wedge \vec{i}\\ &= (\vec{k} - \vec{j}) + (\vec{k} + \vec{i}) + \vec{i} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Il punto A dell'asse centrale è dato da

$$A - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2} = \frac{(2\vec{i} + \vec{k}) \wedge (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})}{5} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{5},$$

quindi $A = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$. L'equazione dell'asse centrale è la seguente: $P - A = \lambda\vec{R}$, oppure

$$x - \tfrac{1}{5} = 2\lambda, \quad y + \tfrac{2}{5} = 0, \quad z + \tfrac{2}{5} = \lambda.$$

Eliminando λ, si ottiene $x - 2z = 1$, $y = -\frac{2}{5}$.

c. L'invariante vettoriale è dato dall'espressione

$$\vec{M}_p = \frac{\vec{M}(O) \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} = \frac{12}{5} \vec{\imath} + \frac{6}{5} \vec{k} \neq \vec{0}.$$

Dunque il sistema si riduce in modo equivalente a $(A, \vec{R})$ più una coppia di vettori applicati $(P_1, \vec{w})$ e $(P_2, -\vec{w})$ per cui $\vec{w} \perp \vec{R}$ e

$$(A - O) \wedge \vec{R} + (P_1 - O) \wedge \vec{w} + (P_2 - O) \wedge (-\vec{w}) = \vec{M}(O).$$

oppure

$$(P_1 - P_2) \wedge \vec{w} = \vec{M}_p.$$

Una possibile scelta è $\vec{w} = \vec{\jmath}$, $P_1 = (\frac{6}{5}, 0, 0)$ e $P_2 = (0, 0, -\frac{12}{5})$.

3. a. Partendo da

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \wedge (P_1 - P_2), \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{\omega} \wedge (P_2 - P_3),$$

troviamo $\omega_x = 1$ e $\omega_y = 4$ (dalla prima equazione) e $\omega_z = -\frac{1}{2}$ e $\vec{v}_3 = (0, 2, 0)$ (dalla seconda equazione).

b. Abbiamo

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_1 = 8 \neq 0,$$

quindi il moto è elicoidale (non rotatorio).

4. a. Essendo un solido di rotazione, il baricentro è un punto dell'asse di rotazione z. Dunque basta calcolare

$$z_G = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} zr\, dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} r\, dr} = \frac{\int_a^b z f(z)^2\, dz}{\int_a^b f(z)^2\, dz}.$$

b. Rispetto all'asse z si ha

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} r^3\, dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b f(z)^4\, dz.$$

5. a. Essendo $-c\dot{x}$ la forza d'attrito, abbiamo

$$\ddot{z} = -g, \qquad \ddot{x} = -\frac{c}{m} \dot{x}.$$

b. Risolvendo le due equazioni differenziali, otteniamo

$$\dot{z} = \dot{z}_0 - gt, \qquad z = z_0 + \dot{z}_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-ct/m}, \qquad x = x_0 + \frac{\dot{x}_0 m}{c}[1 - e^{-ct/m}],$$

essendo $(x_0, 0, z_0)$ la posizione iniziale e $(\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$ la velocità iniziale. Prendendo $\dot{x}_0 > 0$ e $\dot{z}_0 = x_0 = z_0 = 0$, si ha

$$(x, y, z) = \left(\frac{\dot{x}_0 m}{c}[1 - e^{-ct/m}], 0, -\tfrac{1}{2}gt^2 \right).$$

c. La forza totale agente dipende dalla velocità della particella e non può essere conservativa.

6. a. $N = 3-1 = 2$ (un vincolo olonomo). $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$. In coordinate cilindriche abbiamo $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = tr$, dunque $\vec{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\vec{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$, $\dot{z} = r + t\dot{r}$. Quindi

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + [r + t\dot{r}]^2) = \tfrac{1}{2}m(r^2[1 + \dot{\theta}^2] + [1 + t^2]\dot{r}^2 + 2tr\dot{r}).$$

Di conseguenza,

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(r^2[1 + \dot{\theta}^2] + [1 + t^2]\dot{r}^2 + 2tr\dot{r}) - \tfrac{1}{2}k(1 + t^2)r^2.$$

b. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le seguenti:

$$\frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] = 0,$$

$$mr(1 + \dot{\theta}^2) + mt\dot{r} - k(1 + t^2)r = \frac{d}{dt}\left[m(1 + t^2)\dot{r} + mtr\right],$$

oppure

$$\ddot{r} = \frac{4\dot{A}^2}{(1 + t^2)r^3} - \frac{k}{m}r,$$

essendo $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ la velocità areale.

c. L'hamiltoniana non è costante di moto, poichè la lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo. D'altra parte, lo è il momento generalizzato

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$