

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 14.12.2012

Cognome e nome: Matricola:

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito nell'AA precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P :

$$x = 15e^{-5t} \sin(2t) \cos(3t), \quad y = 15e^{-5t} \sin(2t) \sin(3t), \quad z = 8e^{-5t} \cos(2t).$$

essendo $t \geq 0$.

- a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P .
- b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t .
- c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P .

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h, \quad x^2 + y^2 \leq |z|\sqrt{2}\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

- a. Trovare il baricentro del solido.
- b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z .
- c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse x .
- d. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $y = z = -h$.

3. Consideriamo il sistema dei due corpi, il Sole di massa M_S e un pianeta di massa $m \ll M_S$. I due corpi si muovono nel piano xy .
- Determinare la velocità iniziale \vec{v}_0 affinché la traiettoria del pianeta attorno al baricentro sia una circonferenza.
 - Dimostrare la terza legge di Keplero (cioè, a^3/τ^2 costante) se la traiettoria del pianeta è una circonferenza attorno al baricentro.
 - Determinare i vincoli sull'energia totale \mathcal{H} affinché il pianeta possa essere estromesso dal sistema Solare. Quale tipo di traiettoria seguirebbe il pianeta?
 - Supponendo che il raggio del Sole sia il duecentesimo della distanza tra il pianeta e il baricentro, quale deve essere il rapporto minimo delle masse M_S/m affinché il baricentro cada all'interno del Sole?
4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{e}_r = -\frac{GMm(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

essendo $G > 0$ la costante gravitazionale e M una massa concentrata all'origine.

- Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.
 - Formulare le equazioni di Hamilton.
 - Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti del moto.
5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri l'hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{k}{2} [q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_1q_2 - q_2q_3 - q_3q_1 - \alpha q_1(q_2^2 - q_3^2) - \alpha q_2(q_3^2 - q_1^2) - \alpha q_3(q_1^2 - q_2^2)],$$

dove $m(t) = m_0 e^{-\gamma t}$ è la massa variabile delle tre particelle e $\gamma > 0$.

- Derivare le equazioni di Hamilton.
- Trovare la lagrangiana e derivare le equazioni di Eulero-Lagrange.

- c. Indicare, motivando la risposta, almeno una costante di moto.
6. P_1 , P_2 e P_3 siano tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto ad una terna solidale le loro coordinate siano $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 3, 0)$, $P_3(0, 0, 0)$. Sono date le velocità di P_1 e P_2 ad un dato istante, cioè $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 2, -2)$, mentre la velocità di P_3 in quell'istante è parallela al piano xy .
- Determinare la velocità \vec{v}_3 di P_3 e la velocità angolare $\vec{\omega}$.
 - Stabilire se l'atto di moto è rotatorio.