es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
6	6	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 16.01.2013

Cognome e nome: ....Matricola: ....

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito nell'AA precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P:

$$x = -\tfrac{1}{2}t^2, \qquad y = \tfrac{8}{17}t, \qquad z = \tfrac{15}{17}t,$$

essendo $t \geq 0$.

   a. Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P.

   b. Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t.

   c. Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P.

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h,\ \sqrt{2(x^2+y^2)} \leq |z|\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

   a. Trovare il baricentro del solido.

   b. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.

   c. Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse di equazione $x = -y = \frac{1}{2}h\sqrt{2}$.

3. Una particella di massa m cade sotto l'effetto della forza gravitazionale e di una seconda forza d'attrito proporzionale al suo vettore velocità, cioè,

$$\vec{F} = -m\left\{g\vec{k} + c\dot{\vec{x}}\right\}$$

per un'opportuna costante $c > 0$, essendo $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

   a. Date la posizione iniziale $(0, 0, z_0)$ e la velocità iniziale $(0, y_0, 0)$, determinare la velocità $\dot{\vec{x}}(t)$.

   b. Determinare la posizione $\vec{x}(t)$.

   c. Discutere l'andamento della posizione se $t \to +\infty$.

4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sotto l'effetto della sola forza

$$\vec{F} = -\frac{GMme^{-\gamma t}}{x^2 + y^2 + z^2}\,\hat{e}_r = -\frac{GMme^{-\gamma t}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

essendo $G > 0$ la costante gravitazionale, M una massa concentrata all'origine e γ è una costante positiva.

   a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate.

   b. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   c. Indicare, motivando la risposta, almeno una costante del moto.

5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri l'hamiltoniano

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{k}{2}\big[q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - q_1q_2 - q_2q_3 - q_3q_1 \\ - \alpha q_1(q_2^2 - q_3^2) - \alpha q_2(q_3^2 - q_1^2) - \alpha q_3(q_1^2 - q_2^2)\big],\end{aligned}$$

dove m è la massa delle tre particelle.

   a. Derivare le equazioni di Hamilton.

   b. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange.

   c. Indicare, motivando la risposta, almeno due costanti di moto.

6. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}), \quad (P_2, \vec{i} - \vec{k}), \quad (P_3, -\vec{j} - \vec{k}), \quad (P_4, -\vec{i}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$, $P_4 = (0, 0, 0)$. Si chiede di:

   a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
   b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
   c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.